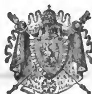
SUPPLÉMENT

DE LA

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE,

PAR M. HACHETTE, INSTITUTEUR DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR-ADJOINT DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.



PARIS,

J. KLOSTERMANN fils, Libraire, rue du Jardinet, n°. 13.

M. DCCC. XII.

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.

PROGRAMME

DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

ET DE SES APPLICATIONS.

De la ligne droite et du plan.

Première question. Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une droite donnée, et trouver la grandeur d'une partie de cette droite.

2e. Par un point donné, mener un plan parallèle à un autre plan donné.

3e. Construire le plan qui passe par trois points donnés dans l'espace.

4e. Deux plans étant donnés, trouver les projections de leur intersection.

5e. Une droite et un plan étant donnés, trouver les projections du point où la droite rencontre le plan. (*Deux solutions.*)

6e. Par un point donné, mener une perpendiculaire à un plan donné, et construire les points de rencontre de la droite et du plan.

7e. Par un point donné, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée, et construire le point de rencontre des deux droites.

8e. Un plan étant donné, trouver les angles qu'il forme avec les plans de projection.

9e. Deux plans étant donnés, construire l'angle qu'ils forment entre eux.

*

10°. Deux droites qui se coupent étant données, construire l'angle qu'elles forment entre elles.

11°. Construire l'angle formé par une droite et par un plan donné de position dans l'espace.

12°. Deux droites étant données dans l'espace, 1°. construire leur plus courte distance; 2°. déterminer la position de la droite sur laquelle se mesure cette distance.

Des plans tangens et des normales aux surfaces courbes.

13°. Mener un plan tangent à une surface cylindrique, 1°. par un point pris sur la surface; 2°. par un point pris hors de la surface; 3°. parallèlement à une droite donnée.

14°. Mener un plan tangent à une surface conique, 1°. par un point pris sur la surface; 2°. par un point pris hors de la surface; 3°. parallèlement à une droite donnée.

15°. Par un point pris sur une surface de révolution dont on connaît la courbe méridienne, mener un plan tangent à cette surface.

16°. Par un point pris sur la surface gauche du second degré, mener un plan tangent à cette surface.

De l'intersection des surfaces.

17°. Construire la section faite sur la surface d'un cylindre droit vertical, par un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Mener la tangente à la courbe d'intersection.

Faire le développement de la surface cylindrique, et y rapporter la courbe d'intersection, ainsi que ses tangentes.

18°. Construire l'intersection d'un cône droit par un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection; développement et tangente.

19°. Construire l'intersection d'une surface de révolution par un plan, et les tangentes à la courbe d'intersection.

Résoudre cette question, lorsque la ligne génératrice est une droite qui ne rencontre pas l'axe.

20°. Construire la section faite sur la surface d'un cylindre oblique (*à base circulaire*) par un plan perpendiculaire à ses arêtes.

Mener la tangente à la courbe d'intersection.

Faire le développement de la surface cylindrique, et y rapporter la courbe d'intersection, ainsi que ses tangentes.

21°. Construire l'intersection de deux surfaces cylindriques, et les tangentes à cette courbe.

22°. Construire l'intersection de deux cônes obliques et les tangentes à cette courbe.

23°. Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

APPLICATIONS.

Solution de quelques problêmes de géométrie.

24°. Quatre points étant donnés dans l'espace, en trouver un cinquième qui soit à égale distance de chacun d'eux, ce qui se réduit à circonscrire une sphère à une pyramide donnée.

25°. Quatre plans étant donnés, trouver le point qui est à égale distance de chacun d'eux, ce qui se réduit à inscrire une sphère dans une pyramide donnée.

26°. Dans une pyramide triangulaire, on peut, en faisant abstraction de la base, ne considérer que six angles; savoir : les angles des trois arêtes qui ont pour sommet commun le sommet de la pyramide, et les angles des plans menés par ces arêtes. De ces six angles, trois étant donnés, trouver celui des trois autres que l'on voudra.

27°. Par une droite donnée, mener un plan tangent à la surface d'une sphère.

28°. Par une droite donnée dans l'espace, mener un plan tangent à une surface de révolution.

29°. Par un point donné sur une Épicycloïde sphérique, mener une tangente à cette courbe.

30°. Une Hélice étant donnée sur un cylindre droit à base circulaire, mener une tangente à cette courbe, parallèle à un plan donné.

31°. Connaissant les distances d'un point, 1°. à trois points donnés; 2°. à trois droites données, construire ce point.

32°. Connaissant les angles que forment, avec la verticale, les rayons visuels dirigés de trois points connus vers un quatrième qui ne l'est pas, construire ce point.

33°. Connaissant les angles que forment entre eux les rayons visuels dirigés d'un point vers trois autres donnés de position, construire ce point.

APPLICATIONS

de la Géométrie descriptive aux arts graphiques.

STÉRÉOTOMIE.

Coupe des Pierres.

1. Porte biaise, en talus, rachetant un berceau cylindrique.
2. Porte biaise, en tour ronde, en talus, rachetant un berceau sphérique.
3. Biais passé, ou Corne de vache.
4. Arrière-voussure de Marseille.
5. Voûte d'arête, Barlongue, et Voûte en arc de cloître.
6. Voûte d'arête en tour ronde.
7. Descente droite.
8. Descente biaise (*Deux solutions*).
9. Trompe dans l'angle, biaise.
10. Trompe sur le coin.
11. Vis à jour (*Escalier*).
12. Courbe rampante (*Escalier.*)

Charpente.

1. Croupe droite.
2. Croupe biaise.
3. Empanon déversé.
4. Nones.
5. Pannes et Tasseaux.
6. Courbe rampante.

OMBRES, PERSPECTIVE, LAVIS.

1. Cheminées sur un comble.
2. Puits militaire.
3. Sphère.
4. Niche sphérique.
5. Vase (*Surface de révolution*).
6. Pont.
7. Chapiteau dorique.
8. Piédouche.
9. Corniche avec attique (*Pour exemple du dessin au lavis*).

MACHINES.

I.

Du Mouvement circulaire, du Mouvement rectiligne, du Mouvement alternatif (ou de *va et vient*) circulaire et rectiligne.

De la forme des Machines *élémentaires* par lesquelles ces mouvemens se combinent deux à deux; division de ces Machines en dix séries. Explication du Tableau contenant les Machines connues de ces dix séries.

Théorie des Épicycloïdes planes et sphériques; application de cette théorie au tracé des Engrenages cylindriques et coniques.

II.

Des Moteurs, et des Machines qui reçoivent directement l'action de ces moteurs.

De l'Effet dynamique pris pour unité de *force*.

Méthode pour estimer ces forces, et pour comparer leurs effets à ceux des machines auxquelles elles sont appliquées.

Des vitesses de rotation constantes ou variables; de la manière de les mesurer; des Régulateurs à force centrifuge.

De la force de l'homme et du cheval.

De l'*Eau* considérée comme moteur.

Des Effets dynamiques d'un cours d'eau, d'une chûte d'eau;

De la manière de mesurer ces Effets. Nouvelle application du dynamomètre.

De l'Ecoulement de l'eau par des tuyaux; de la Veine contractée; de la forme à donner aux tuyaux pour augmenter la quantité d'eau qui s'écoule par ces tuyaux.

Des Roues à axe plein, à axe creux; des Pendules hydrauliques; des Seaux et des Chapelets; des Siphons; des Machines à flotteur.

De la Fontaine de Héron; des Lampes hydrostatiques; de la Machine de *Schemnitz;* du Bélier hydraulique; de la Machine à colonne d'eau; des Réservoirs d'air comprimé.

Des *Machines* employées à élever l'eau, et qui ne sont pas mues directement par l'eau.

De la Machine hydraulique funiculaire (*de Verrat*); des Tubes hydrauliques; de la Machine à force centrifuge; de la Vis d'*Archimède;* des Pompes aspirantes et foulantes; des Pompes à soufflets; des Pompes dans lesquelles des flotteurs cylindriques tiennent lieu de pistons; de la Pompe à double aspiration.

Des moyens de transmettre le mouvement à de grandes distances par une colonne d'eau et par un système de leviers. *Exemples :* la Machine de Marly; la Presse hydraulique.

III.

De l'*Air* considéré comme moteur.

Théorie du Moulin à vent; Méthode pratique pour construire la surface des ailes.

IV.

Des *Combustibles* considérés comme moteurs.

Des effets dynamiques des combustibles, tels que le bois, le charbon, la houille, etc. De la manière de comparer ces effets à ceux qui résultent de l'action de l'eau, du vent.

Description d'*une Machine à feu*; application du Régulateur à force centrifuge.

V.

Machines employées dans les constructions.

Des Cylindres; des Poulies et des Mouffles; Usage des cylindres et des poulies dans les laminoirs et dans les machines à filer le lin, le coton et la laine.

Des Cordes; des Nœuds de cordes.

Des Treuils; des Cabestans. Expériences sur la roideur des cordes.

Des Chèvres, des Grues; des Sonnettes à tiraude et à déclic; de l'enfoncement des pieux et des pilots au moyen de ces deux espèces de sonnettes.

Des Chapelets droits, inclinés; de la Machine à curer les ports.

Des Scies ou Machines à receper les pieux.

FIN DU PROGRAMME.

Ce Programme comprend deux parties :

Le *Traité de Géométrie descriptive* et le *Supplément* renferment les solutions des problêmes généraux énoncés dans la première partie. Un second Supplément contiendra les applications de la Géométrie descriptive à la Perspective, aux Ombres et à la Stéréotomie. En joignant à ce Supplément le *Traité des Machines*, on aura un Cours complet de Géométrie descriptive.

On fait souvent usage, dans la Géométrie descriptive, pure ou appliquée, de propositions qu'on suppose démontrées par l'analyse : comme ces deux sciences se prêtent des secours mutuels, elles doivent être

cultivées en même tems. C'est par cette raison que, d'après l'organisation de l'enseignement de l'Ecole Polytechnique, les mêmes Professeurs sont chargés du Cours de Géométrie et d'Analyse appliquée à la Géométrie.

Dans la première partie du Cours d'Analyse appliquée, on traite les questions relatives à la Ligne droite, au Plan et aux Surfaces du second degré. La seconde partie contient la théorie des Surfaces courbes et des Courbes à double courbure. On doit regarder comme une excellente introduction à ce Cours, l'Ouvrage de M. Carnot, qui a pour titre : *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un Essai sur la Théorie des Transversales.* Un vol. *in*-4°., année 1806.

Pour ne pas donner trop d'étendue au *Supplément de la Géométrie descriptive*, on s'est renfermé dans les questions du Programme adopté pour l'instruction des élèves de l'Ecole Polytechnique. Ceux qui desireront étendre leurs connaissances en géométrie descriptive, liront avec intérêt un Mémoire de M. Dupin, inséré dans le 14e. cahier du *Journal de l'École Polytechnique.* Ils trouveront dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*, les solutions de plusieurs questions intéressantes d'optique et d'astronomie. (*Voyez* tom. 1 de cette *Correspondance*, pag. 148, 177, 399, et tom. 2, pag. 20, 54, 281 (3e cahier). On distinguera parmi les articles de ce recueil, celui qui est relatif à l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, dont les axes ne se rencontrent pas. M. Chapuis, admis l'année dernière (1811) dans le génie maritime, a construit, par une méthode fort élégante, l'intersection de ces deux surfaces de révolution, en n'employant que la ligne droite et le cercle. (*Voyez* tom. 2, de la *Correspondance*, pag. 256, 3e. cahier.)

SUPPLEMENT.

AVERTISSEMENT.

On indique, dans le Supplément, les articles de la Géométrie descriptive auxquels on renvoie, par cette abréviation : (Art. . . . G. D.).

On désigne un point ou une ligne qui est dans l'espace par ses deux projections. Lorsqu'on dit : le point A, A', la ligne AB, CD, il est question d'un point dont A, A' sont les deux projections, ou d'une ligne dont AB, CD sont les deux projections. Lorsqu'on dit : le plan OP, OQ, on désigne un plan dont les traces sur des plans connus, sont les droites OP, OQ.

GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE.

SUPPLÉMENT.

§. Ier.

De la génération des surfaces, et de leur définition.

1. Une surface est définie, lorsque, pour un point quelconque de cette surface, on peut assigner la ligne génératrice constante ou variable de forme qui passe par ce point. Dans un grand nombre de cas, la position de la génératrice, qui correspond à un point déterminé de la surface, n'est pas donnée directement; elle dépend de certaines conditions relatives à la forme et à la loi du mouvement de cette ligne.

Exemple. La surface la plus générale qu'on puisse engendrer par une droite mobile dans l'espace, est déterminée, lorsqu'on assujettit cette droite à s'appuyer constamment sur trois courbes fixes, dont la forme et la position sont données. Cette condition détermine, en effet, toutes les positions de la droite mobile; car, ayant pris un point sur la première courbe, si l'on regarde ce point comme le sommet d'une surface conique qui a pour base la seconde

courbe, et qui coupe la troisième courbe en un ou plusieurs points, les droites menées par ces derniers points, et par le point pris sur la première courbe directrice, s'appuient à-la-fois sur les trois courbes données.

2. Une surface quelconque peut être considérée comme l'enveloppe de l'espace que parcourt une autre surface mobile constante ou variable de forme. Les intersections successives de la surface mobile appartiennent à la surface *enveloppe*, et chacune d'elles peut être regardée comme la génératrice de cette enveloppe.

De toutes ces surfaces *enveloppes*, la plus simple est la *surface développable.* Elle est l'enveloppe de l'espace que parcourt un plan, quelle que soit la loi du mouvement du plan. Les droites intersections du plan mobile sont les génératrices de la surface; et comme un plan quelconque est coupé par les deux plans qui lui sont adjacens, il s'ensuit que deux génératrices consécutives de la surface développable se rencontrent; les points de rencontre de ces génératrices forment une courbe qu'on appelle *l'arête de rebroussement* de la surface. Cette courbe étant donnée, la surface développable à laquelle elle appartient, comme arête de rebroussement, est déterminée; car, si on mène les tangentes à cette courbe, et si on les prolonge indéfiniment, de part et d'autre de la courbe, on formera évidemment deux nappes de surfaces, séparées par l'arête de rebroussement. Les surfaces coniques sont des surfaces développables dont l'arête de rebroussement se réduit à un point.

3. Les côtés de l'angle formé par deux tangentes consécutives de l'arête de rebroussement, comprennent un élément plan de la surface développable. Tous ces élémens réunis sur un plan

sans discontinuité, et dans l'ordre où ils sont placés sur la surface, forment ce qu'on appelle *le développement* de la surface. Une courbe quelconque de la surface devient sur le développement une courbe plane. Supposons qu'elle ait pour tangentes des droites T, T', T''... qui la touchent aux points par lesquels passent les droites A, A', A'', etc. de la surface développable. En nommant t, t', t''... a, a', a''... ce que deviennent les tangentes T, T', T''... et les droites A, A', A''... sur le développement, il est évident que les angles des droites A et T, A' et T', A'' et T'', etc. sont égaux aux angles des droites a et t, a' et t', a'' et t'', etc. puisque les côtés de ces angles sont contenus sur le même élément plan de la surface développable. La ligne de la surface développable touchée par les droites T, T', T''... devient dans le développement, la courbe plane touchée par les droites t, t', t''...; donc si par les points de contact de cette dernière courbe, et des droites t, t', t''... on mène d'autres droites a, a', a''... qui fassent avec les tangentes t, t', t''.... des angles égaux à ceux que les tangentes T, T', T''... font avec les droites A, A', A''... de la surface développable, la suite des angles formés par les droites a, a', a'',.. sera le développement de la surface.

On voit que pour obtenir ce développement, il faut connaître une courbe de la surface développable, telle qu'un point quelconque de cette courbe, et sa tangente en ce point, soient déterminés de position et sur la surface et sur le développement; on peut appeler cette courbe *axe du développement*. Ayant le développement d'une surface, on construira sur le plan de ce développement une ligne quelconque de la surface, en considérant un point de cette ligne comme l'extrémité d'une droite de la surface développable, dont l'autre extrémité sera sur l'axe du développement.

Pour développer les cylindres, on prend ordinairement pour axe de développement le contour de la section perpendiculaire aux arêtes du cylindre. Au moyen de cette section, on construirait une hélice dont la tangente ferait avec la génératrice du cylindre un angle déterminé, et cette hélice pourrait être considérée comme un second axe de développement.

Lorsqu'il s'agit de développer une surface conique, on prend pour axe du développement, l'intersection du cône et d'une sphère d'un rayon quelconque, dont le centre est au sommet du cône. Il est évident que tous les points de cette intersection sont à égale distance du sommet du cône; d'où il suit que cette intersection devient sur le développement du cône, un cercle d'un rayon égal à celui de la sphère.

4. La surface qu'on a définie (§. I, art. 1), et qu'on nomme dans les arts *surface gauche*, a, comme les surfaces développables, la ligne droite pour génératrice, mais elle n'a pas d'arête de rebroussement. Deux droites consécutives de la surface gauche sont coupées par une troisième droite qui leur est perpendiculaire, et les pieds de ces perpendiculaires forment sur cette surface, une courbe remarquable, qu'on peut appeler *courbe de striction.*

5. Trois courbes dirigent le mouvement d'une droite qui engendre une surface gauche. Deux courbes suffisent, lorsque la surface est développable. La condition d'être développable tient lieu de la troisième directrice. En effet, soient A et B les deux courbes données. Ayant pris sur la courbe A, un point quelconque, on peut considérer ce point comme le sommet d'une surface conique, qui a pour base la courbe B, et tout plan tangent à cette surface passera par une tangente à la

courbe B. Donc, si, par la tangente à la courbe A, qui correspond à un point pris à volonté sur cette courbe, on mène un plan tangent à la surface conique, ce plan passera par deux tangentes, l'une à la courbe A, l'autre à la courbe B. En faisant varier le point pris sur la courbe A, on obtiendra une nouvelle position du plan tangent aux courbes A et B; l'enveloppe de l'espace parcouru par ce plan sera la surface développable assujettie à passer par les deux courbes A et B.

Le mouvement du plan qui engendre une surface développable, est encore déterminé par la condition d'être tangent à deux surfaces, dont la forme et la position sont connues; car, un point quelconque de l'espace peut être considéré comme le sommet de deux surfaces coniques circonscrites aux surfaces données; le plan tangent à ces deux cônes est une des positions du plan mobile. Faisant varier le sommet des cônes circonscrits, le plan mobile tangent aux cônes sera déterminé de position, et l'enveloppe de l'espace parcouru par ce plan sera la surface développable assujettie à toucher deux surfaces données. Les courbes de contact de deux surfaces avec une surface développable étant connues, on construirait encore la surface développable, en l'assujettissant à passer par les deux courbes de contact.

6. Les surfaces de révolution sont des surfaces *enveloppes* qui ont pour *enveloppées génératrices*, ou la sphère, ou le cône droit, ou le cylindre dont la base est la courbe génératrice méridienne. Ayant mené par tous les points de la courbe génératrice méridienne, les tangentes et les normales à cette courbe, le cône droit qui a pour axe, l'axe de révolution et pour arête la tangente, la sphère qui a son centre sur cet axe, et pour rayon la portion de la normale, comprise entre la courbe et l'axe de révolution, touchent évidemment la surface de révolution

suivant un cercle; donc chaque cercle est l'intersection de deux cônes droits, ou de deux sphères, circonscrits à la surface de révolution; donc la surface de révolution est l'enveloppe de l'espace que parcourt un cône droit ou une sphère.

7. La courbe génératrice méridienne peut, dans toutes ses positions, être considérée comme la base d'un cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de cette courbe; or ce cylindre est évidemment circonscrit à la surface de révolution; donc, elle est l'enveloppe du cylindre qui a successivement pour base la courbe génératrice, et pour arêtes des droites perpendiculaires au plan de cette base.

8. L'enveloppe de l'espace que parcourt une sphère constante ou variable de rayon, dont le centre se meut sur une courbe donnée, est d'un genre de surfaces *enveloppes* qu'on nomme *surfaces canaux*. Lorsque le rayon de la sphère est constant, et lorsque la ligne que parcourt le centre, est un cercle, la surface enveloppe de la sphère mobile est *annulaire*.

Des surfaces du second degré.

9. La position d'un point dans l'espace est donnée, lorsqu'on connaît (art. 5, G, D) ses distances à trois plans fixes perpendiculaires entre eux. On nomme ces trois distances, les *coordonnées* du point, et les droites intersections des plans rectangulaires, *axes des coordonnées*. Si le point doit se trouver sur une surface dont la forme et la position sont connues, de ces trois coordonnées, deux suffisent pour déterminer sa position, car il est à-la-fois sur une parallèle à l'un des axes des coordonnées, et sur une surface connue; donc, il est à l'intersection de la surface et de cette parallèle. Ainsi, lorsqu'un

point est assujetti à se trouver sur une surface, il y a une telle relation entre les coordonnées de ce point, que deux étant données, la troisième est déterminée. Cette relation est ce que l'on nomme l'*équation* de la surface. Lorsqu'elle est algébrique et du second degré, elle représente la surface qu'on nomme *surface du second degré*. Ainsi, en nommant x, y, z, les coordonnées d'un point dans l'espace, l'équation algébrique la plus générale entre ces trois quantités, représente la surface la plus générale du second degré.

10. Cette définition des surfaces du second degré ne suppose que les premières notions d'algèbre ; mais il faut avoir acquis des connaissances assez étendues sur cette science, pour déduire de l'équation ~~générale des surfaces~~ du second degré, les propriétés qui les caractérisent. Cependant, à cause de l'usage fréquent de ces surfaces dans les arts graphiques, il est indispensable d'en bien connaître, sinon les propriétés, du moins la forme et la génération, et on peut acquérir ces connaissances par de simples considérations de géométrie.

On sait qu'un cône droit peut être coupé par un plan suivant ces trois courbes, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole. Lorsque le plan coupant est parallèle à une arête du cône, la section est une hyperbole : lorsqu'il est parallèle à-la-fois, et à l'arête, et au plan qui touche le cône, suivant cette arête, la section est une parabole : dans tout autre cas, elle est une ellipse. Ces trois courbes sont symétriques par rapport à des droites perpendiculaires entre elles, qu'on nomme *axes principaux* de la section conique. Elles ont des *sommets*, et ces sommets sont les points de rencontre de la courbe et de ses axes principaux. Nous supposons qu'on sache tracer ces courbes, au moyen de leur axes principaux.

Qu'on imagine, par un point quelconque de l'espace; trois droites perpendiculaires entre elles, et supposons que deux de ces droites étant dans un plan horisontal, la troisième droite soit verticale. Concevons que le point commun à ces trois droites soit le centre de trois sphères des rayons a, b, c, ces sphères coupent les trois droites en six points, tels que les deux points placés sur la même droite sont distans des quantités $2a$, $2b$, $2c$.

Cela posé, on construira deux ellipses qui auront pour centre commun, le point d'intersection des trois droites rectangulaires; et pour axes principaux, l'une les deux droites $2a$ et $2b$; et l'autre les deux droites $2a$ et $2c$. Ayant mené, par la droite $2c$, une suite de plans qui coupent la première ellipse suivant une autre droite passant par le centre de cette ellipse, on construira sur ces deux droites comme axes principaux, une nouvelle ellipse. La suite d'ellipses qui ont pour axe commun la droite $2c$, appartiendra à une surface du second degré, qu'on nomme *ellipsoïde*. Si on conçoit des hyperboles qui ont pour un de leurs axes principaux la droite $2c$, et pour sommets des points de l'ellipse construite sur les droites $2a$, $2b$, comme axes, cette suite d'hyperboles appartient à une seconde surface du second degré, que j'ai nommée *hyperboloïde à une nappe*.

11. Substituant à l'ellipse qui a pour axes les droites $2a$ et $2b$, une hyperbole construite sur les mêmes axes, et dont les sommets réels sont à l'extrémité de l'axe $2a$, on menera par l'axe $2c$ une suite de plans dont chacun coupera le plan de l'hyperbole suivant une droite. Prenant la portion de cette droite comprise entre les deux branches de l'hyperbole, pour l'axe d'une nouvelle hyperbole qui a pour second axe la droite $2c$, la suite de ces nouvelles hyperboles appartient à une troisième

surface du second degré, qu'on nomme *hyperboloïde à deux nappes.*

Les trois droites $2a$, $2b$, $2c$ sont *les axes principaux* de la surface du second degré. Les points de rencontre de ces axes avec la surface en sont les sommets ; dans l'ellipsoïde, les six sommets sont réels; dans l'hyperboloïde à une nappe, le nombre de sommets réels se réduit à quatre, et à deux dans l'hyperboloïde à deux nappes. Deux autres surfaces du second degré que j'ai nommées *paraboloïde elliptique* et *paraboloïde hyperbolique*, n'ont qu'un seul sommet réel.

12. Qu'on imagine deux plans perpendiculaires entre eux, et deux paraboles dont les grands axes soient dirigés suivant l'intersection de ces plans, et qui aient pour sommet commun un point de cette intersection. Supposons de plus les paraboles d'amplitudes différentes; l'une des paraboles restant fixe, faisons mouvoir l'autre de manière que leurs plans soient toujours rectangulaires, et que le sommet de la parabole mobile soit constamment sur la parabole fixe. La parabole mobile décrira dans ce mouvement *le paraboloïde elliptique*, si elle diverge dans le même sens que la parabole fixe, et si elle diverge en sens contraire, elle décrira le *paraboloïde hyperbolique.*

13. J'ai fait voir que toutes les espèces de surfaces du second degré se réduisaient aux cinq suivantes : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe, l'hyperboloïde à deux nappes, le paraboloïde elliptique, le paraboloïde hyperbolique. Les constantes qui déterminent ces cinq surfaces, peuvent avoir entre elles certaines relations qui les transforment en d'autres surfaces du second degré, telles que la sphère, le cône, le cylindre, etc. Lorsque deux des trois axes $2a$, $2b$, $2c$, de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde sont égaux, ces surfaces sont de révolution, et ont pour

axe de révolution celui des trois axes qui n'a pas d'égal. Lorsque les trois axes sont égaux, l'ellipsoïde se change en une sphère.

14. Nous avons démontré (Application de l'analyse à la géométrie, surfaces du second degré) que l'hyperboloïde à une nappe peut être engendrée par une droite de deux manières différentes; si la droite génératrice est constamment perpendiculaire au plan de la section principale elliptique, construite sur $2a$ et $2b$ comme axes, l'hyperboloïde à une nappe devient un cylindre droit elliptique. Le paraboloïde hyperbolique peut aussi être engendré par une droite de deux manières différentes, mais dans chaque système de génération, la droite génératrice est constamment parallèle à un même plan. On verra au *paragraphe IV de ce Supplément*, qu'il suit de cette propriété que le paraboloïde hyperbolique ne peut pas être coupé par un plan suivant une courbe fermée.

15. L'hyperboloïde à une nappe devient un cône droit à base elliptique, lorsque l'ellipse construite sur les deux axes $2a$, $2b$ se réduit à un point, tandis que le troisième axe $2c$ devient infini. Le cône est la plus simple des surfaces du second degré qui peuvent être coupées suivant les trois courbes du second degré, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole. Il jouit, ainsi que toutes les surfaces du second degré (en observant que sur le paraboloïde hyperbolique, les cercles sont d'un rayon infini, et se confondent avec les droites de cette surface) de la propriété d'être coupé par deux systêmes de plans différemment inclinés, suivant des cercles. Prenant un de ces cercles pour sa base, la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de ce cercle ne passe pas par le centre du cercle; et par cette raison, on le nomme *cône oblique*. Lorsqu'on cherche quelle est la surface engendrée

par l'intersection de deux plans rectangulaires, qui se meuvent de manière que ces plans dans toutes leurs positions comprennent un angle donné, on trouve que cette surface est un cône oblique. En effet, soient (Pl. 1, *fig. a*) OP, OQ les deux côtés d'un angle par lesquels on mène deux plans perpendiculaires entre eux, et OA la projection de l'intersection de deux de ces plans sur le plan de l'angle POQ. Ayant mené une droite quelconque DC perpendiculaire à OA, considérons cette droite comme la trace d'un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans rectangulaires, et qui coupe ces plans suivant des droites rectangulaires passant par les points C et D.

On formera dans l'espace deux triangles rectangles, qui auront un sommet commun sur la droite intersection des deux plans rectangulaires, et pour hypothénuses les droites OD, DC; d'où il suit que le sommet commun aux deux triangles est sur le cercle d'intersection des deux sphères décrites sur OD et DC, comme diamètres. Ces deux sphères se coupent suivant le petit cercle dont le plan est perpendiculaire à celui de l'angle POQ, et dont le diamètre BD perpendiculaire au côté OP de cet angle, est la corde commune aux deux grands cercles DABO et CBD des sphères; or, quelle que soit la corde DC menée par le point D dans l'angle POQ, le petit cercle d'intersection des sphères décrites sur DC et sur OD comme diamètres, ne variera pas; donc ce petit cercle est le lieu géométrique des sommets des triangles rectangles, qui ont pour hypothénuses la droite de longueur constante OD et la droite variable DC; donc on peut le considérer comme la base d'un cône oblique, dont les arêtes sont les intersections de deux plans rectangulaires, assujettis à se mouvoir entre les côtés d'un angle donné.

Au lieu de prendre le point fixe D sur le côté OQ de l'angle POQ, on peut le supposer pris sur le côté OP. On démontre

de la même manière que la droite intersection de deux plans rectangulaires assujettis à se mouvoir entre les côtés d'un angle donné, engendre un cône oblique, qui a pour base un cercle dont le plan est perpendiculaire au second côté OQ de l'angle donné. Donc ce cône oblique jouit, comme tous les autres cônes, de la propriété d'être coupé suivant un cercle par deux systèmes de plans différens. Dans ce cas particulier, les plans coupans sont perpendiculaires aux arêtes du cône, situées dans le plan des centres des deux bases circulaires.

16. Les sections faites par des plans parallèles sur toutes les surfaces du second degré sont semblables. Cette proposition qu'on démontre par l'analyse, est évidente pour le cône oblique, que l'on peut considérer comme la limite des pyramides qui auraient même sommet que le cône, et dont les bases seraient des polygones réguliers, inscrits à l'une des deux bases circulaires de ce cône.

---

§. II.

Des questions relatives à la ligne droite et au plan.

Le programme qui précède ce Supplément contient la série des questions relatives à la ligne droite et au plan, qui forment les préliminaires de la Géométrie descriptive. On a ajouté dans le paragraphe suivant quelques articles à ces préliminaires. Les questions qu'on y a traitées, sont marquées des numéros qui indiquent leur rang dans le Programme.

17. *Question* (3). Construire le plan qui passe par trois points donnés dans l'espace.

Solution. Après avoir joint les points donnés par des droites, on cherche les points de rencontre de ces droites avec les plans de projection; les droites qui unissent ces points sont les traces demandées.

Si les droites menées par les points donnés, rencontraient les plans de projection, en des points situés au dehors de la feuille de dessin, on leur substituerait d'autres droites, qui s'appuieraient sur deux quelconques d'entre elles.

Soient (Pl. 1, fig. 1 du Supplément) A, B, C les projections des trois points donnés, *a*, *b*, *c* les projections verticales des mêmes points; les droites qui unissent ces points coupent le plan horisontal en L, M, N, et le plan vertical en P, Q, R; les droites LMN, PQR sont les traces du plan demandé. Ces traces ont un point commun S sur la droite d'intersection des deux plans de projections.

18. Un plan étant donné par ses deux traces LS, SP, et connaissant une seule projection d'un point situé dans ce plan, on propose de déterminer la seconde projection de ce point?

Soit A la projection horisontale d'un point du plan dont les traces sont LS, SP; il s'agit de trouver la projection verticale *a* de ce même point. On concevra par ce point une parallèle à la trace horisontale LS, ou une parallèle à la trace SP. La parallèle à la trace LS a pour projections horisontale et verticale, les droites AF, *a*G parallèles l'une à LS, l'autre à TS, et les deux points F et G sont situés sur une droite FG perpendiculaire à l'intersection ST des deux plans de projection. Le point *a* se trouvant à-la-fois et sur la droite G*a* et sur la perpendiculaire A*a* à ST, est à la rencontre de ces deux droites.

La parallèle à la trace PS a pour projections les droites AK, H*a*, l'une parallèle à TS, et l'autre parallèle à PS, et le

point H est la projection verticale du point K ; donc le point a est à la rencontre des deux droites Aa, Ha.

19. Maintenant on suppose que le plan donné par les deux traces LS, SP tourne autour de sa trace sur le plan horisontal ou autour de sa trace sur le plan vertical, pour venir s'appliquer ou sur le plan horisontal ou sur le plan vertical ; et on demande quelle est après ce mouvement, la position d'un point du plan, dont on connaît les deux projections?

Lorsqu'on fait tourner un plan autour d'une droite comme charnière, chaque point du plan décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite, et dont le centre est sur cette droite. Donc lorsque le plan donné par ses deux traces SL, SP, tourne autour de la trace horisontale SL, le point (A, a) (c'est-à-dire dont les projections sont A et a) décrit un cercle dans le plan vertical ADa', et le centre de ce cercle est en D. Le rayon de ce cercle est l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés les droites AD, $A'a$. Donc si l'on porte la droite AD en $A'D'$, la droite $aD' = Da'$ est le rayon du cercle décrit par le point (A, a) ; a' est la position de ce point, lorsque le plan (LS, SP) auquel il appartient, est abattu sur le plan horisontal.

On peut remarquer que le point a' est encore à l'extrémité de la droite $Ka' = Ha$. Si le plan eût tourné autour de la trace SP, pour venir s'appliquer sur le plan vertical, le point (A, a) aurait pris la position a'', telle que $Ga'' = FA$, aa'' étant perpendiculaire à SP.

20. *Question* (5). Une droite et un plan étant donnés, trouver les projections du point où la droite rencontre le plan.

Solution. On mène par la droite donnée un plan quelconque;

qui coupe le plan donné suivant une droite; le point commun à cette droite et à la droite donnée est le point cherché.

Soient (Pl. 1, *fig.* 2, *du Supplément*) SL, SP les traces du plan donné; AB, *ab* les projections de la droite qui coupe le plan. Le plan vertical AB coupe le plan donné suivant une droite dont la projection verticale est P*d*. L'intersection *a* de cette droite P*d* et de la droite *ab* est la projection verticale du point cherché, et A en est la projection horisontale.

Par la même raison le plan *abf*L, perpendiculaire au plan vertical, coupe le plan donné LSP, suivant une droite LA dont la projection horisontale coupe la droite donnée AB au point A, projection horisontale du point demandé.

Au lieu de mener par la droite donnée un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, on peut concevoir par cette droite un plan quelconque (Pl. 2, *fig.* 3 *du Supplément*) LRTPR′, dont les traces sont assujetties à passer par les points R et R′, où la droite donnée rencontre les plans de projection. Ce plan et le plan donné se coupent suivant une droite qui se projette en LX et L′P. Ces deux projections coupent les projections AB, *ab*, de la droite donnée en deux points A et *a*, qui sont les projections du point cherché.

21. *Question* (6). Par un point donné mener une perpendiculaire à un plan donné, et construire les points de rencontre de la droite et du plan.

La proposition qui sert de base à la solution de ce problême (*art.* 16, G, D, pag. 24) est une de celles dont on fait le plus souvent usage dans la géométrie descriptive. Voici son énoncé:

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projec-

tions de la droite sont perpendiculaires aux traces du plan, et réciproquement.

Pour démontrer cette proposition, il faut remarquer que lorsque deux plans sont perpendiculaires entre eux, toutes les lignes droites ou courbes tracées sur l'un, se projettent sur l'autre suivant leur intersection commune, en sorte qu'on peut dire que cette intersection commune est la projection du premier plan sur le second, ou du second sur le premier.

Soit D une droite quelconque, P le plan qui lui est perpendiculaire, et H le plan sur lequel on la projette; il s'agit de démontrer que la trace du plan P sur le plan H est perpendiculaire à la projection de la droite D sur le même plan H.

Le plan par lequel on projette la droite D sur le plan H, est par hypothèse perpendiculaire à ce plan; de plus il est perpendiculaire au plan P, puisqu'il passe par la droite D qui lui est perpendiculaire; donc il est perpendiculaire à la droite d'intersection des plans P et H; donc il coupe le plan H suivant une perpendiculaire à cette droite. Mais cette perpendiculaire est, d'après la remarque qui précède, la projection de la droite D sur le plan H, donc cette projection est perpendiculaire à la trace des plans P et H.

22. La réciproque est encore vraie; c'est-à-dire que si les deux projections d'une droite sont perpendiculaires aux traces d'un plan; ce plan est perpendiculaire à la droite; car si par chaque projection de la droite D on conçoit le plan perpendiculaire au plan de projection, on aura deux plans, dont la droite D est l'intersection commune; or chacun de ces plans est perpendiculaire au plan donné par ses traces; donc leur intersection, et par conséquent la droite D, est perpendiculaire à ce dernier plan.

23. *Problème* (12). Deux droites étant données dans l'espace, 1°. construire leur plus courte distance, 2°. déterminer la portion de la droite sur laquelle se mesure cette distance.

Solution. 1°. Quelle que soit la position de deux droites dans l'espace, on peut par un point quelconque donné, mener un plan parallèle à ces deux droites; car pour qu'un plan soit parallèle à une droite, il suffit qu'il passe par une parallèle à cette droite; donc si par un point donné, on menait des parallèles à deux droites dont la position serait connue, le plan qui passerait par ces deux parallèles, serait parallèle aux deux droites données.

2°. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la projection de cette droite sur ce plan, est parallèle à la droite même.

Cela posé, nommons **D** et **D′** les deux droites données, et concevons par chacune de ces droites un premier plan parallèle à-la-fois à l'une et à l'autre, et un second plan perpendiculaire au premier. Ces deux plans menés par les droites **D** et **D′** perpendiculairement au plan parallèle à ces mêmes droites, se coupent suivant une troisième droite **P**, qui est perpendiculaire aux droites **D** et **D′**, car elle est perpendiculaire à deux plans parallèles qui les contiennent; c'est donc sur cette droite **P** que se mesure la plus courte distance des droites **D** et **D′**. On obtiendra la portion de la droite **P** comprise entre les droites **D** et **D′** par la construction suivante.

Soient (Pl. 2, *fig.* 4) AB, *ab* les projections horisontale et verticale de la droite **D**; CD, *cd* les projections de la droite **D′**. La droite **D** coupe le plan vertical de projection en un point *b*, dont la projection horisontale est **B**. Si l'on conçoit par le point *b* une parallèle à la droite **D′**, dont les projections horisontale et verticale sont **BE** et *be*; cette parallèle coupe le plan

horisontal au point E; donc le plan parallèle aux deux droites D et D', mené par la droite D, coupe le plan horisontal suivant AEF, et le plan vertical suivant F*b*; le point F commun aux deux traces, est sur la commune intersection LM des plans de projection. Désignons ce plan par la lettre L.

La droite D' coupe le plan horisontal au point C, dont la projection verticale est *c*. La projection de ce point sur le plan L est sur la droite perpendiculaire à ce plan, dont les projections CG, *cg* sont perpendiculaires aux traces AF, F*b* du plan L. Mais le plan vertical CGH coupe le plan L suivant une droite dont la projection verticale est *g'h*; donc le point *i* intersection des droites *g'h*, *c*K est la projection verticale de la projection du point C sur le plan L, et le point I en est la projection horisontale. La droite D', à laquelle appartient le point C, se projette sur le plan L, suivant une droite parallèle à ellemême; donc cette droite a pour projections IN, *in*, parallèles à CD, *cd*; elle rencontre la droite D en un point dont les projections sont N et *n*.

Ce point, intersection de la droite D et du plan qui projette la droite D' sur le plan L, appartient à la perpendiculaire aux deux droites D et D'; or cette perpendiculaire aux deux droites est aussi perpendiculaire au plan L; donc elle a pour projections les droites PNQ, *pn*R perpendiculaires aux traces AF, F*b* du plan L. La portion de cette perpendiculaire comprise entre les deux droites données, ayant pour projections les droites PN, *pn*; on en construira la longueur, et on aura la plus courte distance des deux droites D et D' en grandeur et en direction.

§. III.

Des plans tangens aux surfaces courbes.

24. Le plan qui touche une surface en un point est l'élément de la surface qui correspond à ce point, prolongé indéfiniment, comme la tangente à une courbe est l'élément de cette courbe prolongé indéfiniment. Il suit de cette définition que le plan tangent contient les tangentes à toutes les sections de la surface qui passent par le point de contact, et que deux de ces tangentes déterminent la position du plan tangent. Il n'y a qu'un seul cas où le plan mené par deux tangentes qui partent d'un même point d'une surface, coupera cette surface; c'est lorsque les deux tangentes se croiseront au point d'intersection de deux branches d'une même courbe : d'où il suit que toutes les fois que deux tangentes partiront d'un même point d'une surface, et toucheront deux courbes différentes, le plan mené par ces deux tangentes sera nécessairement tangent à la surface.

Les considérations sur la sphère, qui est la surface la plus simple et la plus régulière, conduisent à plusieurs théorêmes très-intéressans, que M. Monge a démontrés (art. 36 — 44, G. D.). Il a donné la solution des questions suivantes.

1°. Par une droite donnée, mener un plan tangent à la surface d'une sphère.

2°. Par un point donné, mener un plan tangent à-la-fois aux surfaces de deux sphères.

3°. Mener un plan tangent à trois sphères données de grandeur et de position.

Je vais ajouter à la solution de ces trois questions celle du problême suivant.

Déterminer le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre sphères données ?

Du contact de la sphère et du plan.

25. Deux sphères étant données, concevons les deux cônes droits circonscrits à ces sphères, qui ont pour axe commun la droite qui unit les centres des sphères. L'un de ces cônes a son sommet au-delà des centres; l'autre est placé entre ces centres. Pour les distinguer, nous nommerons le premier, cône circonscrit extérieur, et l'autre cône circonscrit intérieur. En considérant à-la-fois deux sphères et les deux cônes circonscrits à ces sphères, il est évident que par un point donné, on ne peut mener que quatre plans tangens aux deux sphères, puisque par ce point on ne peut mener que deux plans tangens à chacun des deux cônes circonscrits.

26. Pour démontrer qu'un plan tangent à trois sphères ne peut les toucher que de huit manières différentes, nous concevrons les six cônes extérieurs et intérieurs circonscrits aux trois sphères, et nous désignerons les sommets des trois cônes extérieurs par les lettres S, S′, S″, et les sommets des trois cônes intérieurs par les lettres *s*, *s*′, *s*″. De ces six cônes, les trois qui sont touchés par un même plan, ont leurs sommets sur une même droite, et cette droite est (art. 42, G. D.) l'intersection du plan tangent aux trois sphères et du plan qui passe par les centres de ces sphères. De plus, les six sommets S, S′, S″, *s*, *s*′, *s*″ sont distribués sur quatre droites. En effet, dans les combinaisons de ces six sommets trois à trois, il faut exclure, 1°. celles dans lesquelles entrent S et *s*, ou S′ et *s*′, ou S″ et *s*″, parce

que le même plan ne peut pas toucher à-la-fois les deux cônes extérieur et intérieur circonscrits à deux sphères ; 2°. celles où il entre un des trois sommets s, s', s'' avec deux des trois sommets S, S′, S″, parce que le plan qui touche deux quelconques des trois cônes extérieurs, touche nécessairement le troisième ; 3°. enfin la combinaison s, s', s'', parce que le plan qui touche deux cônes intérieurs, touche nécessairement un extérieur ; donc les combinaisons des sommets trois à trois se réduisent aux quatre suivantes :

$$SS'S'' — Ss's'' — sS's'' — ss'S'',$$

elles déterminent quatre droites par chacune desquelles on peut mener des plans tangens à l'une quelconque des trois sphères données ; ce qui fixe à huit le nombre de plans qui peuvent toucher ces sphères.

De la sphère tangente à trois autres sphères.

27. Lorsque deux sphères se touchent, la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons ; donc si l'on nomme **A**, **B**, **C** les sphères touchées, et a, b, c leurs rayons, **T** la sphère touchante et t son rayon ; le centre de la sphère **T** est sur l'une des deux sphères a', a'' qui sont concentriques à **A**, et qui ont pour rayons $t+a$ et $t-a$. Par la même raison, il est sur une des deux sphères b', b'' concentriques à **B**, qui ont pour rayons $t+b$ et $t-b$; il est enfin sur une des deux sphères c', c'' concentriques à **C**, qui ont pour rayons $t+c$ et $t-c$. D'où il suit que le centre de la sphère **T** est le point commun à trois des six sphères a', a'', b', b'', c', c''. Or en excluant des combinaisons de ces six

sphères, prises trois à trois, celles dans lesquelles entrent les sphères a', a'', ou b', b'', ou c', c''; parce que des sphères concentriques ne peuvent pas se couper, ces combinaisons se réduisent aux huit suivantes :

1°. $a'\,b'\,c'$, 2°. $a'\,b'\,c''$, 3°. $a'\,b''c'$, 4°. $a'\,b''c''$;
5°. $a''b'\,c'$, 6°. $a''b'\,c''$, 7°. $a''b''c'$, 8°. $a''b''c''$.

De plus chaque système de trois sphères qui se coupent, détermine par leur intersection deux points qui leur sont communs; donc les huit combinaisons précédentes donnent seize points pour le centre de la sphère T, qui peut toucher trois sphères données A, B, C. Ce nombre se réduit à huit lorsque la sphère touchante est d'un rayon infini, c'est-à-dire lorsqu'elle devient surface plane; car dans ce cas les trois sphères d'un même système deviennent trois plans qui n'ont qu'un seul point commun.

De la courbe que parcourt le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes.

28. Cette courbe jouit de la propriété que si l'on prend un point quelconque sur son contour, les distances de ce point aux centres des sphères fixes diffèrent entre elles d'une quantité constante et indépendante du rayon de la sphère mobile; en sorte que nommant d, d', d'' les distances de ce point aux centres des sphères fixes, les quantités $d - d'$, $d' - d''$, $d'' - d$ sont constantes, quelle que soit la sphère tangente. En effet, adoptant les dénominations précédentes, les distances d, d', d'' peuvent avoir les huit systèmes de valeurs suivantes, qui correspondent aux huit combinaisons des sphères a', a'', b', b'', c', c'' (art. 27).

1°. $d = t + a$, $d' = t + b$, $d'' = t + c$,
2°. $d = t + a$, $d' = t + b$, $d'' = t - c$,
3°. $d = t + a$, $d' = t - b$, $d'' = t + c$,
4°. $d = t + a$, $d' = t - b$, $d'' = t - c$,
5°. $d = t - a$, $d' = t + b$, $d'' = t + c$,
6°. $d = t - a$, $d' = t + b$, $d'' = t - c$,
7°. $d = t - a$, $d' = t - b$, $d'' = t + c$,
8°. $d = t - a$, $d' = t - b$, $d'' = t - c$.

Il est évident que pour l'un quelconque de ces systêmes, pour le premier, par exemple, les valeurs de $d - d'$, $d' - d''$, $d'' - d$ sont constantes et égales aux quantités $a - b$, $b - c$, $c - a$.

Mais il est à remarquer que le huitième systême donne les mêmes valeurs absolues pour les différences des distances d, d', d''. La même remarque s'applique aux systêmes 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5; donc les centres de toutes les sphères qui peuvent toucher trois sphères fixes, et qui appartiennent à huit séries différentes, sont distribuées sur quatre courbes telles que pour la première, on a

$$d - d' = a - b,\quad d' - d'' = b - c,\quad d'' - d = c - a.$$

Pour la seconde courbe, on a

$$d - d' = a - b,\quad d' - d'' = b + c,\quad d'' - d = a + c.$$

Pour la troisième

$$d - d' = a + b,\quad d' - d'' = b + c,\quad d'' - d = c - a.$$

Pour la quatrième enfin

$$d - d' = a + b,\quad d' - d'' = b - c,\quad d'' - d = a + c.$$

Nous démontrerons que ces quatre courbes sont planes; et que leurs plans sont perpendiculaires aux quatre droites (art. 26) qui contiennent les six sommets des cônes circonscrits aux trois sphères fixes touchées par la sphère mobile; enfin que chacune d'elles résulte de l'intersection d'un cône droit par un plan.

De la courbe formée par les points de contact de chacune des sphères fixes avec la sphère mobile considérée dans toutes ses positions.

29. Parmi les huit séries de sphères qui peuvent toucher trois sphères fixes, prenons-en une à volonté, par exemple la série des sphères qui touchent les sphères fixes extérieurement. Une quelconque des sphères de cette série touche les trois sphères fixes en trois points; nous allons d'abord démontrer que le plan mené par ces trois points passe par la droite qui contient les sommets des trois cônes extérieurs circonscrits aux sphères fixes. Nommons comme précédemment A, B, C les sphères fixes touchées, et T la sphère mobile tangente. Le plan qui passe par le centre de la sphère T et par les centres de deux quelconques des trois sphères A, B, C, de A et B par exemple, coupe les trois sphères A, B, T suivant trois grands cercles, dont l'un appartenant à la sphère T touche les deux grands cercles des sphères A et B.

Soient (*fig. a*, Pl. 3) X, Y, Z les centres de ces trois cercles, E et F les points de contact de la sphère T avec les sphères A et B; il est évident que la droite EF qui joint les points de contact E et F, passe par le sommet O du cône extérieur circonscrit aux sphères A et B, puisque les deux droites OE, OF sont dans le rapport constant des deux rayons XE,

VII des sphères A et B; d'où il suit que quel que soit le rayon ZE ou ZF de la sphère T, la droite qui joint les deux points de contact de cette sphère et des sphères A et B, passe constamment par le sommet O du cône extérieur circonscrit à ces sphères A et B.

Par la même raison, la droite qui joint les points de contact de la sphère T et des sphères A et C, passe par le sommet du cône extérieur circonscrit à ces sphères. Donc le plan mené par les trois points de contact de la sphère T et des sphères A, B, C, passe par la droite qui contient les trois sommets des cônes extérieurs circonscrits aux sphères A, B, C; ainsi menant par cette droite un plan quelconque qui coupe les trois sphères A, B, C, suivant trois petits cercles, un quatrième cercle tangent à ces trois derniers appartient à une des sphères T, qui touche les trois sphères A, B, C; d'où il suit que la perpendiculaire au plan de ce quatrième cercle élevée par le centre de ce cercle, passe par le centre de la sphère T.

3o. Désignons les points de contact de la sphère T et des sphères A, B, C par les trois lettres α, β, γ, et par α', β', γ' les points de contact d'une autre sphère T' avec les mêmes sphères A, B, C. On vient de prouver que le plan des trois points α, β, γ, et le plan des trois points α', β', γ', passent par une même droite, celle qui contient les sommets des cônes extérieurs circonscrits aux sphères A, B, C. Maintenant nous allons démontrer que les six points α, β, γ, α', β', γ' appartiennent à une même sphère.

D'abord en prenant quatre de ces six points dans l'ordre suivant

$$\alpha\beta\alpha'\beta', \quad \alpha\gamma\alpha'\gamma', \quad \beta\gamma\beta'\gamma',$$

ils sont dans un même plan et sur une même circonférence; car les droites menées par les points α, β, et par les points α', β', concourent en un même point, qui est le sommet du cône extérieur circonscrit aux sphères A et B; donc le plan mené par ces deux droites coupe les sphères A et B, suivant deux cercles, dont l'un contient les points α, α', et le second les points β, β', comme on le voit (*fig. a* pl. 3); or les droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, concourent au même point O, qui représente dans cette figure le sommet du cône circonscrit aux sphères A et B; donc les quatre points α, β, α', β' appartiennent à une circonférence de cercle dont le centre est en K. D'où il suit qu'on pourra mener une sphère par les quatre points α, β, α', β' et un cinquième point γ. Or cette sphère contiendra le sixième point γ', puisque les quatre points $\alpha\gamma\alpha'\gamma'$ ou $\beta\gamma\beta'\gamma'$ sont sur une même circonférence; donc les six points α, β, γ, α', β', γ' appartiennent à une même sphère : le centre et le rayon de cette sphère varient en même tems que les deux sphères T et T' qui touchent les sphères fixes A, B, C.

31. Nommons S la sphère qui passe par les six points α, β, γ, α', β', γ'. Elle coupe la sphère A suivant un petit cercle qui passe par les points α, α', et les deux sphères T et T' suivant deux autres cercles tangens au premier aux points α, α', puisque ces sphères sont tangentes à la sphère A. Considérons les tangentes communes au petit cercle de la sphère A et aux deux petits cercles de la sphère S; on a démontré que les plans de ces petits cercles passaient par la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux trois sphères A, B, C; donc les tangentes à ces cercles passent par la même droite, mais de plus elles sont dans le plan du cercle d'intersection des sphères A et S, donc elles passent par le point d'intersection de ce

plan et de la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux trois sommets A, B, C.

32. Si on suppose que les sphères A, B, C restant les mêmes, elles soient touchées par une autre sphère T″ différente de T′, les nouveaux points de contact seront α'', β'', γ''. On prouvera de la même manière, 1°. que les six points α, β, γ, α'', β'', γ'' sont situés sur une même sphère S′ qui coupera la sphère A suivant un petit cercle, et les sphères T, T″ suivant deux autres petits cercles tangens au premier; 2°. que les tangentes communes au petit cercle de la sphère A et aux deux petits cercles des sphères T et T″ se rencontrent en un même point de la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux sphères A, B, C; or la tangente commune au petit cercle de la sphère A et au petit cercle de la sphère T ne change pas de position, donc elle coupe la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits en un point qui ne varie pas; donc c'est vers ce point que concourent toutes les tangentes communes aux petits cercles d'intersection de la sphère constante A et des sphères variables S, S′, S″, etc....., d'où il suit que ce point est le sommet d'un cône droit circonscrit à la sphère A, qui a pour base un cercle dont le plan est perpendiculaire à celui des centres des trois sphères A, B, C.

Ainsi lorsqu'une sphère variable T, T′, T″... touche constamment trois sphères fixes A, B, C, les points de contact α, α', α''..., *de l'une des sphères fixes, de A par exemple, et des sphères T, T′, T″..., appartiennent à un petit cercle de la sphère A, dont le plan est perpendiculaire à celui qui passe par les centres des trois sphères A, B, C.*

33. La ligne de contact de chacune des trois sphères fixes et

de la sphère mobile qui les touche, étant un cercle; il s'ensuit que la courbe décrite par le centre de cette sphère mobile, est commune à trois cônes droits qui ont pour sommets les centres des sphères fixes, et pour bases les petits cercles de contact de ces sphères et de la sphère mobile. De plus nous allons démontrer que *cette courbe est plane.*

34. Ayant nommé T et T' la sphère mobile considérée dans deux positions différentes, on a vu, 1°. que la sphère T touche les trois sphères fixes A, B, C en trois points α, β, γ, et la sphère T' en trois points α', β', γ'; 2°. que les six points α, β, γ, α', β', γ' appartiennent à une même sphère S qui contient les petits cercles menés par les trois point α, β, γ et par les trois points α', β', γ'; 3°. que les plans de ces petits cercles passent, quelles que soient les sphères T et T', par la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes.

Cela posé, une perpendiculaire au plan du petit cercle $\alpha\beta\gamma$ (en désignant ainsi le cercle qui passe par les trois points α, β, γ); élevée par le centre de ce cercle, contient évidemment le centre de la sphère T; de même une perpendiculaire au plan du petit cercle $\alpha'\beta'\gamma'$ élevée par son centre, contient le centre de la sphère T'. Ces perpendiculaires sont dans le même plan, puisqu'elles passent par le centre de la sphère S, et ce plan est perpendiculaire à la droite qui joint les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes. Or le point de rencontre de ces perpendiculaires est d'autant plus près de la courbe que décrit le centre de la sphère mobile, que les deux sphères consécutives T et T' diffèrent moins entre elles; donc lorsque ces sphères croissent par degrés insensibles, l'intersection successive des perpendiculaires aux plans des cercles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, etc. menés

par les centres de ces cercles, forme la courbe que décrit le centre de la sphère mobile ; donc cette courbe a pour tangentes ces perpendiculaires. Mais une ligne dont toutes les tangentes sont situées dans des plans perpendiculaires à une même droite est nécessairement plane, *donc la courbe décrite par le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes, est plane.* Ayant démontré que cette courbe est commune à trois cônes droits dont elle est l'intersection, on doit conclure que ces cônes se coupent suivant une seule et même ligne plane. *Ainsi la courbe décrite par le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes, est une section conique, dont le plan est perpendiculaire à une droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes.*

35. On a prouvé (art. 28) que les centres des huit séries de sphères qui peuvent toucher trois sphères données, étaient distribués sur quatre courbes différentes ; il suit de ce qui précède que ces courbes sont des sections coniques situées dans des plans perpendiculaires aux quatre droites qui contiennent les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes.

A chaque courbe, lieu des centres de la sphère mobile, correspond un cercle qui est aussi le lieu des points de contact d'une sphère fixe avec cette sphère mobile ; donc toutes les sphères qui peuvent toucher trois sphères fixes, touchent chacune d'elles en des points qui sont distribués sur quatre petits cercles ; chacun de ces petits cercles est la base d'un cône droit qui a son sommet sur l'une des quatre droites menées par les six sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes.

36. *Problême.* Etant donnés les centres et les rayons de

trois sphères, déterminer, 1°. la position des plans des quatre courbes lieux des centres de toutes les sphères qui peuvent toucher les trois sphères données; 2°. les quatre petits cercles lieux des points de contact de chacune des sphères données avec la sphère mobile qui les touche dans toutes ses positions.

Solution. 1°. Ayant mené par les centres des trois sphères données un plan qui coupe ces sphères suivant trois grands cercles, on tracera dans ce plan les quatre droites sur lesquelles sont distribués les sommets des six cônes circonscrits aux sphères; à chacune de ces droites correspond (art. 27.) une série de sphères tangentes aux trois sphères données. Après avoir déterminé le centre d'une quelconque des sphères comprises dans une série, on menera par ce centre et perpendiculairement à la droite correspondante à cette série, un plan qui sera un des plans demandés. On construira le centre d'une sphère comprise dans les quatre séries des sphères correspondantes aux droites qui unissent les sommets des cônes circonscrits, en observant que son rayon est pris arbitrairement, et que son centre est l'intersection de trois sphères dont les rayons et les centres sont connus.

2°. Après avoir construit les points d'intersection des droites qui contiennent les sommets des cônes circonscrits, et des plans des quatre courbes qui contiennent les centres de toutes les sphères tangentes aux trois sphères données, on menera par ces points, des tangentes aux trois grands cercles des sphères données, , et les points de contact de ces tangentes détermineront sur chaque grand cercle la trace du plan du petit cercle, lieu des points de contact de chacune des sphères données avec la sphère mobile qui les touche dans toutes ses positions. Le plan de chaque petit cercle étant perpendiculaire au plan des

centre des trois sphères données, sa position est entièrement déterminée.

37. *Probléme.* Etant donnés trois cercles dans un plan, trouver un quatrième cercle tangent aux trois premiers.

Solution. On considérera les trois cercles donnés comme les grands cercles de trois sphères, et la question proposée sera la même que celle-ci.

Trouver parmi les sphères tangentes à trois sphères données celles qui ont leurs centres dans le même plan que celui des centres des trois sphères.

Pour résoudre cette dernière question, on construira (problême précédent) sur chacune des sphères données, les quatre petits cercles lieu des points de contact de ces sphères avec toutes les sphères qui peuvent les toucher en même tems; les huit points communs à ces petits cercles et aux grands cercles donnés des sphères, sont ceux par lesquels doivent passer les cercles tangens aux cercles donnés. Il suit de cette construction que le problême proposé a huit solutions, c'est-à-dire qu'étant donnés trois cercles, ils peuvent être touchés par un quatrième de huit manières différentes.

38. Connaissant les points de contact des trois cercles donnés avec les cercles qui peuvent les toucher, il sera facile de distinguer ceux de ces points qui appartiennent au même cercle tangent; mais pour éviter toute difficulté dans le choix de ces points, il conviendra de trouver sur le plan des trois cercles donnés, les traces des plans qui contiennent les centres des sphères tangentes aux trois sphères qui ont pour grands cercles les cercles donnés. Chacune de ces traces contiendra deux des centres

*

des cercles cherchés ; car on se rappelle (art. 35) que cette trace doit rencontrer une des droites qui unissent les sommets des cônes circonscrits, en un point par lequel on mène deux tangentes au grand cercle de l'une des sphères touchées ; or les points de contact de ces tangentes sont ceux où ce grand cercle est touché par le quatrième cercle qui toucherait les trois cercles donnés ; donc les deux rayons de ce grand cercle, menés par les points de contact, couperont la trace du plan qui contient les centres des sphères tangentes, en deux points qui seront les centres de deux cercles tangens aux trois cercles donnés.

39. *Problême.* Mener une sphère tangente à quatre sphères données.

Solution. Soient A, B, C, D les quatre sphères données, et S la cinquième sphère qui les touche. Considérant d'abord trois des quatre sphères données, par exemple A, B, C, on construira, 1°. les plans des quatre courbes qui contiennent les centres de toutes les sphères qui peuvent toucher les trois premières sphères données ; 2°. on déterminera sur chacune des trois sphères A, B, C les quatre petits cercles lieux des points de contact de ces sphères avec celles qui peuvent les toucher en même tems. On substituera ensuite la sphère D à la sphère C, et on obtiendra de la même manière sur chacune des trois sphères A, B, D les quatre petits cercles lieux des points de contact de ces sphères avec celles qui peuvent les toucher en même tems, ainsi que les quatre plans lieux des centres de ces mêmes sphères. Les quatre petits cercles lieux des points de contact de la sphère A ou B, A par exemple, et des sphères tangentes aux trois sphères A, B, C, et

Erratum. Page suivante (33), 16e. ligne, au lieu de A_1 B''_1 C''_1, lisez : A''_1 B''_1 C''_1.

les quatre petits cercles lieux des points de contact de la même sphère A et des sphères tangentes aux trois sphères A, B, D, se coupent en général en trente-deux points, parmi lesquels se trouvent nécessairement les points de contact de la sphère A et d'une sphère S tangente aux quatre sphères données A, B, C, D. Pour trouver le nombre et la position de ces derniers points, il faut remarquer que des trente-deux points d'intersection des huit petits cercles de la sphère A, on ne doit tenir compte que de ceux qui résultent de l'intersection des petits cercles qui proviennent de combinaisons pareilles entre les sphères A, B, C ou A, B, D.

Les quatre petits cercles lieux des points de contact de la sphère A et des sphères qui touchent les trois sphères A, B, C, peuvent être désignés de la manière suivante :

(E) $A^e_i B^e_i C^e_i$, $A^e_i B^e_i C^i_e$, $A^e_i B^i_e C^e_i$, $A^i_e B^e_i C^e_i$;

Le premier petit cercle $A_i B^e_i C^e_i$ est le lieu des points de contact de la sphère A et d toutes les sphères qui touchent en même tems extérieurement ou intérieurement les trois sphères A, B, C. Le second petit cercle $A^e_i B^e_i C^i_e$ est le lieu des points de contact de la sphère A et des sphères qui touchent extérieurement les sphères A et B et. intérieurement la sphère C, et des sphères qui touchent A et B intérieurement et C extérieurement. Le troisième cercle $A^e_i B^i_e C^e_i$ est le lieu des points de contact de la sphère A et de deux séries de sphères, les unes qui touchent les sphères A et C extérieurement et la sphère B intérieurement, les autres qui touchent les sphères A et C intérieurement et la sphère B extérieurement ; enfin le quatrième cercle $A^i_e B^e_i C^e_i$ est le lieu des points de contact de la sphère A et de deux séries de sphères, les unes qui

touchent les sphères B et C extérieurement, et la sphère A intérieurement, les autres qui touchent les sphères B et C intérieurement, et la sphère A extérieurement.

Les quatre petits cercles lieux des points de contact de la sphère A et des sphères qui touchent les trois sphères A, B, D, seront désignés, d'après la même notation, de la manière suivante :

(E′) $A^e_i\, B^e_i\, D^e_i$; $A^e_i\, B^e_i\, D^i_e$, $A^e_i\, B^i_e\, D^e_i$, $A^i_e\, B^e_i\, D^e_i$;

Des huit cercles (E), (E′), les notations de ceux qui résultent de combinaisons pareilles entre les sphères A, B, C et les sphères A, B, D, comprennent les lettres A et B avec les mêmes exposans ; ainsi les petits cercles $A^e_i\, B^e_i\, C^e_i$, $A^e_i\, B^e_i\, D^e_i$ résultent de combinaisons pareilles ; les petits cercles $A^e_i\, B^e_i\, C^e_i$, $A^e_i\, B^i_e\, D^e_i$ résultent de combinaisons différentes, et parmi les sphères tangentes aux quatre sphères A, B, C, D, il n'y en a aucune qui puisse toucher la sphère A en un point de l'intersection de ces deux derniers cercles. En effet, par ce point on ne pourrait mener qu'une sphère qui toucherait les deux sphères A, B intérieurement ou extérieurement, puisqu'il appartient au cercle $A^e_i\, B^e_i\, C^e_i$; mais par ce même point on pourrait mener une sphère qui toucherait les deux sphères A et B, l'une intérieurement, l'autre extérieurement, puisqu'il appartient au cercle $A^e_i\, B^i_e\, D^i_e$; or lorsqu'une sphère touche deux sphères A et B, les contacts ne peuvent pas être en même tems tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs, et être l'un extérieur, l'autre intérieur ; donc il n'y a aucune sphère tangente aux quatre sphères A, B, C, D qui puisse toucher la sphère A au point d'intersection des deux cercles de combinaisons différentes $A^e_i\, B^e_i\, C^e_i$, $A^e_i\, B^i_e\, D^e_i$.

En raisonnant de la même manière sur deux autres petits cercles de combinaisons différentes situés sur la sphère A, on conclura qu'une sphère tangente aux quatre sphères A, B, C, D, ne peut toucher la sphère A qu'aux points communs à l'un quelconque des quatre cercles (E), et à deux des cercles (E'); d'où il suit qu'il y a en général seize points de contact de l'une quelconque des quatre sphères A, B, C, D, et d'une cinquième sphère qui les touche toutes quatre en même tems.

Ayant déterminé sur l'un des cercles (E) de la sphère (A); les quatre points de contact de cette sphère A et de la sphère qui touche les quatre sphères A, B, C, D. On menera par ces points les rayons de la sphère A, et ces quatre rayons prolongés contiendront les centres de quatre sphères tangentes aux sphères A, B, C, D. De plus ces centres seront sur l'un des quatre plans (art. 35) qui contiennent les centres des sphères tangentes aux trois sphères A, B, C, et qui correspondent aux quatre cercles (E); donc les centres et les rayons de quatre sphères tangentes aux quatre sphères A, B, C, D, seront déterminés. On construira de la même manière les centres et les rayons des douze autres sphères tangentes aux mêmes sphères A, B, C, D.

Résumé des propositions relatives au contact des sphères.

40. 1°. Un plan peut toucher trois sphères données de huit manières différentes.

2°. Une sphère d'un rayon déterminé peut toucher trois sphères données de seize manières différentes.

3°. Lorsqu'une sphère variable de rayon se meut en touchant constamment trois sphères fixes données de grandeur et de

position, la courbe formée sur chacune des sphères fixes par la suite de ses points de contact avec la sphère mobile, est un cercle, et la ligne que le centre de cette dernière sphère parcourt, est une section conique.

4°. Trois cercles donnés dans un plan peuvent être touchés par un quatrième cercle de huit manières différentes.

5°. Quatre sphères peuvent être touchées par une cinquième sphère de seize manières différentes.

Du plan tangent à une surface, mené par une droite donnée hors de la surface.

41. Le plan tangent à une surface quelconque menée par une droite donnée, touche évidemment toutes les surfaces coniques qui sont circonscrites à cette surface, et qui ont leurs sommets sur la droite; d'où il suit que toutes les lignes de contact des surfaces coniques tangentes, et de la surface touchée, passent par les points de contact de cette surface et du plan mené par la droite donnée. Mais ces points sont déterminés par les intersections des lignes de contact de deux surfaces coniques et de la surface donnée; donc, si l'on prend deux points arbitrairement sur la droite donnée, et si l'on considère ces deux points comme les sommets de surfaces coniques circonscrites à la surface proposée, la question est ramenée à trouver la courbe de contact de cette surface, et d'une surface conique qui lui est circonscrite. Pour résoudre cette dernière question généralement, on coupe la surface par une suite de plans, verticaux par exemple, qui passent par le sommet du cône; on mène par ce sommet, des tangentes aux sections faites dans

la surface par ces plans; ces tangentes sont les arêtes du cône circonscrit à la surface proposée. La ligne qui joint les points de contact des tangentes aux sections planes verticales, est la courbe de contact de la surface proposée et de la surface conique circonscrite, qui a son sommet en un point donné.

Lorsque la surface proposée est développable, le cône circonscrit qui a son sommet en un point pris sur la droite donnée hors de cette surface, se réduit à un plan, et à moins que la droite donnée ne soit toute entière dans ce plan, il est impossible de mener par cette droite un plan tangent à la surface développable; d'où il suit que le plan tangent à la surface développable est déterminé par la seule condition de passer par un point donné hors de la surface. Pour toute autre surface, le plan tangent peut être assujetti à passer par une droite donnée hors de la surface. Après avoir exposé une méthode générale pour déterminer le plan tangent d'après cette condition, nous allons faire connaître des méthodes particulières plus simples, qui s'appliquent aux deux classes de surfaces qu'on emploie le plus fréquemment dans les arts, les surfaces de révolution et les surfaces gauches.

42. La propriété caractéristique du plan tangent à une surface de révolution, est d'être perpendiculaire au plan méridien mené par le point de contact de la surface et du plan. Lorsque le point de contact est donné, il est évident que la tangente à la courbe génératrice qui passe par ce point, détermine la position du plan tangent. Une autre condition, celle de passer par une droite donnée hors de la surface, détermine également la position de ce plan. On a fait voir (art. 47, G. D.) que le plan tangent assujetti à passer par une droite donnée, touchait la surface de révolution en un point d'un cercle de cette

surface, dont on trouve le centre et le rayon en menant une tangente commune à la courbe méridienne de la surface et à une hyperbole tracée sur le plan méridien de cette courbe. Cette solution suppose que l'on sache mener une tangente à deux courbes qui ont été l'une et l'autre construites par points. En appliquant une règle tangentiellement aux deux courbes, on détermine, d'une manière satisfaisante pour la pratique, la tangente à ces courbes, mais elle laisse une grande incertitude sur la position des points de contact. La solution que je vais exposer est fondée sur d'autres principes; elle est générale; et j'en ai fait un grand nombre d'applications dans le tracé des ombres et de la perspective.

43. *Problême.* Mener, par une droite donnée, un plan tangent à une surface de révolution?

Solution. Les surfaces de révolution sont (art. 6 et 7 de ce *Supplément*) les enveloppes de l'espace que parcourt un cône droit, ou une sphère, variables l'un et l'autre de grandeur et de position, ou un cylindre variable seulement de position. En coupant une surface de révolution par un plan perpendiculaire à son axe, la section qui est un cercle, détermine le cône droit et la sphère qui touchent la surface de révolution suivant ce cercle. Considérons d'abord le cône droit qui a pour axe, l'axe de révolution, et pour arête la tangente à la courbe méridienne. Tout plan tangent à ce cône sera aussi tangent à la surface de révolution; donc, si, par un point A donné hors de cette surface, on mène un plan tangent au cône droit, il touchera la surface; la droite menée par le point de contact, et par le point donné A, sera évidemment l'arête d'un cône circonscrit à la surface de révolution, dont le sommet est en A. On

déterminera de la même manière tant d'arêtes qu'on voudra de ce dernier cône ; et les points où ces arêtes touchent la surface de révolution, appartiennent à la ligne de contact de cette surface et de la surface conique circonscrite, qui a son sommet en un point A donné hors la surface. Donc si l'on prend sur la droite donnée deux points, et si l'on construit les surfaces coniques qui ont leurs sommets en ces points, et qui sont circonscrites à la surface de révolution, les intersections des courbes de contact des surfaces coniques et de la surface de révolution ; détermineront les points par lesquels doivent passer les plans tangens demandés.

44. La considération de la sphère qui touche la surface de révolution suivant un cercle ; conduit au même résultat. En effet, le point pris sur la droite donnée peut être regardé comme le sommet d'un cône droit qui enveloppe la sphère et la touche suivant un petit cercle. Ce petit cercle, et le cercle commun à la sphère et à la surface de révolution, se couperont en général en deux points. Si l'on mène par ces points des plans tangens à la sphère, ces plans seront aussi tangens à la surface de révolution; de plus, ils passeront par le point pris sur la droite donnée ; donc ils toucheront la surface de révolution en des points qui appartiennent à la courbe de contact de cette surface et de la surface conique circonscrite qui a pour sommet le point pris sur la droite donnée.

45. La surface de révolution étant l'enveloppe de l'espace que parcourt un cylindre de forme constante, qui a pour base la courbe méridienne de la surface, et pour arêtes des droites perpendiculaires au plan de cette courbe, on peut encore mener par un point donné hors la surface de révolution, des plans

tangens à ce cylindre, et déterminer les arêtes de contact. Ces arêtes passent par des points de la courbe méridienne, qui appartiennent à la courbe de contact de la surface de révolution et de la surface conique qui a son sommet au point donné hors la surface.

Cette solution est moins simple que les deux premières; parce qu'elle oblige à mener une tangente à la courbe méridienne par un point donné hors de cette courbe; et dans les deux solutions précédentes, on n'est assujetti qu'à mener des tangentes à cette courbe par des points pris sur la courbe.

46. Pour expliquer les constructions graphiques fondées sur les considérations précédentes, nous allons prendre pour exemple l'ellipsoïde de révolution, et nous supposerons le plan horisontal de projection, perpendiculaire à l'axe de cet ellipsoïde.

Soient (Pl. 3 *du Supplément*) A, *aa'* les deux projections de l'axe de révolution; *ada'* l'ellipse génératrice contenue dans le plan méridien ADG; BC, *bc* les deux projections de la droite par laquelle il s'agit de mener un plan tangent à l'ellipsoïde de révolution; E et *e* les deux projections d'un point pris arbitrairement sur cette droite, pour servir de sommet à une surface conique circonscrite à la surface de révolution.

Ayant coupé la surface de révolution par un plan *dd'* perpendiculaire à l'axe *aa'*, on mène la tangente *ds* à la courbe méridienne *ada'*, qui coupe *aa'* au point *s*. Ce point est évidemment le sommet d'un cône droit qui touche la surface de révolution suivant un cercle du diamètre *dd'*; et tout plan tangent à ce cône est aussi tangent à la surface de révolution, quel que soit le point de l'espace par lequel on le mène.

Soient E et *e* les projections de ce point. La droite AE, *se*

coupe le plan horisontal dd' en un point F, f. Ayant décrit du point A, comme centre, le cercle du diamètre DD' $=$ dd', la tangente à ce cercle menée par le point F, le touche aux points H, H', qui se projettent en h, h'. Ces deux points H, h et H', h' appartiennent à la courbe de contact de la surface de révolution, et du cône qui a son sommet au point E, e de la droite donnée BC, bc (art. 29, G.D.).

47. On serait averti que le cercle du diamètre DD', dd' ne contient pas de points de la courbe, si le point, tel que F, était dans l'intérieur du cercle du diamètre DD'. Mais pour éviter des constructions inutiles, on cherchera d'abord la limite des cercles qui contiennent des points de la courbe de contact. Pour trouver cette limite, on menera par le point E, e, les tangentes à la courbe génératrice tracée dans le plan méridien qui passe par ce point. Dans le cas particulier de l'ellipsoïde, on peut mener deux tangentes, et les cercles de la surface de révolution, qui passent par les points de contact de ces deux tangentes, sont les limites des cercles qui contiennent les points de la courbe de contact du cône et de la surface de révolution.

Faisant tourner le plan méridien AE d'un arc égal à EG, et le point G étant projeté en g sur l'horisontale eg, on menera par le point g, deux tangentes à la courbe méridienne $ada'd'$; et par les deux points de contact i, i', on menera des plans perpendiculaires à l'axe aa', qui couperont la surface de révolution suivant les cercles limites de la courbe cherchée: prenant les distances des points i, i' à l'axe aa', et les portant sur le méridien AE de A en K, et de A en K', les points qui se projettent sur le plan horisontal en K et K', et sur le plan vertical en k et k', sont les points extrêmes de la ligne de

contact de la surface de révolution et du cône qui a son sommet au point E, *e* de la droite donnée BC, *bc*.

48. Pour suivre l'ordre des opérations graphiques le plus avantageux, on déterminera les deux points M, *m*, et M', *m'* situés sur le plus grand cercle OO'*oo'* de la surface de révolution. Ayant décrit du point A, comme centre, avec un diamètre OO' = *oo'*, un cercle, et considérant ce cercle comme la base d'un cylindre vertical, ce cylindre touchera la surface de révolution suivant le cercle OO', *oo'*, et les deux plans tangens à ce cylindre, qui ont pour traces horisontales les droites EM, EM', touchent la surface de révolution aux deux points M, *m* et M', *m'*. Donc ces deux points appartiennent à la courbe de contact du cône qui a son sommet au point E, *e*, et de la surface de révolution.

La courbe méridienne *ada'd'*, OO' peut être considérée comme la base d'un cylindre horisontal tangent à la surface de révolution, donc si l'on mène les tangentes *el*, *el'* à cette courbe, les plans tangens au cylindre, qui ont pour traces ces tangentes, touchent la surface de révolution en des points *l*, L, et *l'*, L', qui appartiennent encore à la courbe de contact.

Ayant déterminé les six points K, K', L, L', M, M' de la projection horisontale de la courbe de contact et les six points *k*, *k'*, *l*, *l'*, *m*, *m'* de sa projection verticale, on trouvera les points intermédiaires par la méthode qu'on a suivie pour trouver les points H, *h* et H', *h'*.

49. En exposant cette méthode, nous avons considéré la surface de révolution comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un cône droit, qui a successivement pour arêtes les tangentes de la courbe méridienne. Maintenant nous allons substituer aux

cônes, des sphères qui ont pour rayons les portions de normales à la courbe méridienne, comprises entre cette courbe et l'axe de révolution.

Soient t le centre de l'une de ces sphères, dt son rayon, $dud'v$ l'un de ses grands cercles. Le méridien AE coupe cette sphère suivant un grand cercle, et en supposant ce méridien amené sur le méridien AD'G, le point E, e prend la position g; donc si par le point g on mène les tangentes gu, gv au cercle $dud'v$, la droite uv est le diamètre du cercle de contact de la sphère et du cône droit dont le sommet est en E, e, ou en g. Ce cercle $dud'v$ de la sphère et le cercle dd' commun à la sphère et à la surface de révolution, se coupent suivant une droite horisontale x', perpendiculaire au plan du méridien AE; donc si l'on porte la distance du point x' à l'axe aa' de A en x, cette droite horisontale sera en projection horisontale, HxH' perpendiculaire à la trace AE du méridien qui passe par le point E, e. L'intersection de cette droite HxH' et du cercle décrit du point A comme centre avec un diamètre DD' $=$ dd', donnera les points H, H' de la projection horisontale de la courbe de contact cherchée.

Elevant des perpendiculaires Hh, H'h' à l'intersection XY des plans de projection, et les prolongeant jusqu'à ce qu'elles coupent l'horisontale dd' aux points h et h', ces points appartiennent à la projection verticale de la courbe de contact.

50. Considérons maintenant la surface de révolution comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un cylindre qui a pour base la courbe méridienne, et cherchons dans cette hypothèse un point de la courbe de contact de la surface de révolution et du cône qui a son sommet en un point pris hors de la surface. Soient E, e ce point, AN la trace horisontale d'un plan méridien quelconque, N, n le pied de la perpendiculaire abaissée du point

E, *e* sur le plan méridien AN. On remarquera que les points tels que N se trouvent sur un cercle décrit sur AB comme diamètre. Ayant fait tourner le méridien AN jusqu'à ce qu'il ait pris la position AN′ parallèle à XY, le point N, *n* prend la position *n′*. Par le point *n′*, on mène (art. 45, G. D.), la tangente *n′p* à la courbe méridienne, et on porte la distance *pq* du point de contact *p* à l'axe *aa′*, sur la trace AN de A en P. Le point P et son correspondant *p′* situé sur l'horisontale *pq* sont les deux projections d'un des points de la courbe cherchée. Cette méthode suppose, comme on vient de le voir, qu'on sache mener une tangente, telle que *n′p*, à la courbe méridienne par un point pris hors cette courbe et sur la droite donnée. La tangente *n′p* est la trace d'un plan tangent à la surface cylindrique qui a pour base la courbe méridienne, et dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de cette courbe.

51. Ayant pris sur la droite donnée BC, *bc* un second point, au-dessus ou au-dessous du premier *E*, *e*, on le considérera comme le sommet d'une seconde surface conique circonscrite à la surface de révolution, et on déterminera la courbe de contact de ces deux surfaces par les méthodes qui viennent d'être exposées. Cette seconde courbe de contact coupera la première en un ou plusieurs points; *les plans menés par chacun de ces points et par la droite donnée, toucheront la surface de révolution.*

52. A la seconde surface conique qui enveloppe la surface de révolution, on peut substituer une surface cylindrique dont les arêtes sont parallèles à la droite donnée; la courbe de contact de cette surface et de la surface de révolution contiendra évidemment les points de contact par lesquels on doit mener les

plans tangens demandés. Pour construire cette dernière courbe, il faut d'abord se rappeler les art. 45, 46 de la Géométrie descriptive, qui contiennent la solution de ces deux problêmes: *Mener un plan tangent à une surface cylindrique ou conique par un point pris au dehors de ces surfaces*; il faut de plus considérer le cas où il s'agit de mener le plan tangent à l'une ou à l'autre de ces surfaces parallèlement à une droite donnée.

Soit donnée une surface cylindrique par sa base tracée sur un plan quelconque, et par sa génératrice. On menera par un point quelconque de l'espace deux droites, l'une parallèle à la droite donnée, l'autre parallèle à la génératrice; le plan qui passe par ces deux droites coupera le plan de la base du cylindre suivant une troisième droite. On menera des tangentes à la base, parallèles à cette droite, et ces parallèles seront les traces des plans parallèles à la droite donnée qui touchent la surface cylindrique.

Si un cône est donné par sa base plane et par son sommet, on menera par le sommet une parallèle à la droite donnée. Cette parallèle coupera la base du cône en un point, par lequel on menera des tangentes à cette base; ces tangentes seront les traces des plans demandés.

53. Ayant coupé la surface de révolution par un plan quelconque perpendiculaire à son axe, elle est touchée, suivant le cercle contenu dans ce plan, par un cône droit qui a son sommet sur l'axe. Le plan tangent à ce cône droit, mené parallèlement à la droite donnée, touche la surface de révolution en un point qui appartient à la courbe de contact de cette surface et de la surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à la droite donnée.

La surface de révolution est aussi touchée suivant le cercle

contenu dans le plan perpendiculaire à son axe, par une sphère dont le centre est sur cet axe. Lorsque le grand cercle de cette sphère dont le plan est perpendiculaire à la droite donnée, et le petit cercle commun à la sphère et à la surface de révolution, se coupent en deux points, ces points appartiennent à la courbe de contact de la surface de révolution et du cylindre dont les arêtes sont parallèles à la droite donnée. On obtient encore des points de cette courbe en menant parallèlement à la droite donnée des plans tangens aux cylindres qui ont pour base la courbe méridienne considérée dans ses différentes positions, et pour arêtes des droites perpendiculaires au plan de cette courbe.

54. L'ellipsoïde de révolution (Pl. 3 *du Supplément*) est touché par le cône qui a son sommet au point E, e, suivant une courbe HH'MM'P, $hh'mm'p'$, et par le cylindre dont les arêtes sont parallèles à la droite BC, bc, suivant la courbe $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Ces deux courbes se coupent en deux points α, α' et β, β'; les plans menés par chacun de ces points et par la droite donnée BC, bc touchent la surface de révolution.

On remarquera sur la courbe de contact de la surface de révolution et du cylindre dont les arêtes sont parallèles à la droite donnée, les points dont les projections verticales sont φ' et ψ', ω, μ, γ', δ'. Les deux premiers φ' et ψ' sont les points de contact de la courbe méridienne $a'dd'a$ et des parallèles à la droite bc, projection verticale de la droite donnée. ω et μ appartiennent aux cercles limites de la seconde courbe de contact, et se déterminent comme les points k, k' (art. 47) de la première courbe de contact. Enfin les points γ', δ' correspondent aux points γ, δ placés sur un diamètre $\gamma\delta$ perpendiculaire à la projection horisontale bc de la droite donnée.

Les projections verticales des courbes de contact du cône et

du cylindre, sont dessinées en partie pleines et en partie ponctuées. La partie pleine correspond à la portion de la surface de révolution qui est en avant du méridien OO′, parallèle au plan vertical de projection. La partie pleine dans la projection horisontale correspond à la portion de la surface de révolution qui est au-dessus du plus grand cercle de cette surface OO′MM′, *oo′*.

55. Des trois méthodes que nous avons exposées, une seule suffit pour trouver les courbes qui, par leur intersection, déterminent les points de contact de la surface de révolution et des plans tangens menés par la droite donnée ; cependant pour obtenir ces points avec exactitude, et pour éviter l'emploi des lignes droites qui se couperaient trop obliquement, on sentira dans la pratique des arts graphiques, la nécessité d'avoir recours à l'une et l'autre méthode, et de choisir celle qui donnera les constructions les plus exactes.

Du plan tangent à la surface gauche, engendrée par une droite mobile, qui a pour directrices trois droites données.

56. Cette surface est celle que nous avons nommée *hyperboloïde à une nappe* (§. I, art. 10), et qui jouit de la propriété d'être engendrée par une droite de deux manières différentes ; de sorte que trois droites quelconques appartenant à l'un ou à l'autre système de génération, peuvent être considérées comme les directrices de la droite mobile qui engendre la surface. Il suit de cette propriété qu'il n'y a aucun point de l'hyperboloïde à une nappe par lequel on ne puisse mener deux droites,

dont tous les points appartiennent à cette surface; or le plan tangent à une surface quelconque, contient les tangentes à toutes les sections qui passent par le point de contact; donc le plan tangent en un point de l'hyperboloïde est déterminé par les deux droites de cette surface qui passent par ce point.

Problème. Par un point donné de l'hyperboloïde à une nappe, mener un plan tangent à cette surface.

Solution. Soient A, B, C les trois directrices de la droite mobile de l'hyperboloïde; A', B', C' trois autres droites qui s'appuient sur les trois premières; et supposons que la première A' passe par le point donné. En regardant ces dernières droites comme les directrices, les droites A, B, C correspondent à trois positions de la droite mobile, qui s'appuie sur ces nouvelles directrices. Le plan mené par le point donné sur la droite A', et par la droite B', coupe la droite C' en un autre point. La droite qui joint ces deux points est toute entière sur la surface; donc si par cette droite et par la droite A' on mène un plan, ce plan touchera l'hyperboloïde au point donné sur la droite A'.

Tout ce qu'on vient de dire de l'hyperboloïde à une nappe s'applique également au paraboloïde hyperbolique (§. I, art. 14), engendré par une droite mobile qui s'appuie sur deux droites, comme directrices, et qui est constamment parallèle à un même plan. Cette surface est aussi composée de lignes droites correspondant à deux systêmes de génération; et on peut considérer ces six droites A, B, C, A', B', C', comme appartenant à ces deux systêmes.

57. Quel que soit le point de la droite A', par lequel on

mène un plan tangent à l'hyperboloïde, ce plan tangent passera constamment par la droite A′. Ainsi un plan qui tourne autour d'une droite de l'hyperboloïde, touche cette surface dans toutes ses positions; mais pour chaque position du plan tangent, le point de contact varie, car ce plan coupe les droites B′, C′ en deux points, et la droite variable menée par ces deux points, détermine sur la droite A′, le point de contact du plan et de la surface. Le plan qui touche l'hyperboloïde ne le touche qu'en un point, et suivant un élément qui est infiniment petit dans tous les sens; ce plan prolongé devient sécant, et il coupe la surface, non-seulement suivant la droite A′, mais encore suivant une courbe qui passe par tous les points d'intersection de ce plan et des droites B′, C′, etc.... qui s'appuient sur les trois directrices A, B, C. Le point d'intersection de cette courbe et de la droite A′ détermine le point de contact, sans qu'on soit obligé d'employer le second mode de génération par la ligne droite.

On a vu (art. 49, G. D.) que l'élimination dans l'algèbre a la plus grande analogie avec les opérations par lesquelles on détermine les intersections des surfaces courbes. Il est à remarquer que ces mêmes opérations conduisent à la solution d'un problême relatif aux plans tangens des surfaces courbes, qu'on ne résout en général que par les méthodes du calcul différentiel.

58. *Problème.* On connaît les trois courbes à double courbure directrices de la droite mobile qui engendre (§. I, art. 1) la surface gauche la plus générale, et par un point donné de cette surface, on propose de lui mener un plan tangent.

Solution. La génératrice de la surface qui passe par le point donné de cette surface, s'appuie sur les courbes directrices en

trois points. Si après avoir mené par chacun de ces points la tangente à la courbe directrice à laquelle il appartient, on se sert de ces trois tangentes comme directrices d'une nouvelle surface gauche, cette dernière surface sera évidemment tangente à la première dans tous les points de la droite qui leur est commune; car la droite mobile dans deux positions consécutives et infiniment voisines, est à-la-fois sur les deux surfaces, donc ces surfaces ont pour élément commun celui qui est compris entre les deux positions consécutives de la droite mobile; donc tout plan tangent à l'une en un point quelconque de cet élément, l'est aussi à l'autre. Or (art. 56) on sait mener un plan tangent à la surface gauche qui a pour directrices trois droites, donc le même plan touchera la surface gauche générale.

La surface gauche générale et la surface gauche auxiliaire se touchent suivant un élément, de dimension finie dans le sens de la droite commune à ces deux surfaces, tandis que l'élément commun au plan et à l'une ou à l'autre de ces surfaces courbes, a des dimensions infiniment petites dans tous les sens (§. III, art. 57).

59. Le plan qui tourne autour 'une droite de la surface gauche générale, la touche dans toutes ses positions, puisqu'il touche (art. 58) la surface auxiliaire tangente. Considérons le plan dans trois positions différentes : il touchera la surface en trois points situés sur la même droite. Si par chacun de ces points, on mène une droite quelconque dans le plan qui touche la surface, les trois droites contenues dans les trois plans tangens, peuvent servir de directrices à la droite génératrice de l'hyperboloïde tangent à la surface gauche générale; or dans chaque plan tangent, on peut mener une infinité de droites directrices; donc il y a une infinité d'hyperboloïdes, qui peuvent toucher la surface

gauche générale, suivant une droite de cette surface. Lorsque les trois droites menées dans les plans tangens sont parallèles à un même plan pris à volonté, l'hyperboloïde tangent devient un paraboloïde *hyperbolique* (art. 14); d'où il suit que la surface gauche générale peut aussi être touchée suivant une droite, par un nombre infini de paraboloïdes hyperboliques.

Ainsi l'on peut regarder la surface gauche générale comme l'enveloppe de l'espace (§. I, art. 2) que parcourt ou un hyperboloïde à une nappe, ou un paraboloïde hyperbolique, dont les directrices sont situées dans trois plans qui touchent cette surface en trois points d'une même droite.

60. *Problême.* Construire la courbe de contact de la surface gauche générale avec une surface conique qui a son sommet en un point donné, ou avec une surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à une droite donnée.

Solution. Tout plan qui passe par une droite quelconque de la surface gauche générale, touche cette surface, et on détermine le point de contact ou par la considération de la surface auxiliaire (art. 58), ou par l'intersection de la droite et de la courbe (art. 57) contenues dans le plan tangent. Donc si par une droite de la surface gauche, et par le sommet du cône qui la touche, on mène un plan, le point de contact du plan et de la surface appartient à la courbe de contact de la surface et du cône. De cette manière on construira tant de points qu'on voudra de cette courbe de contact.

Pour déterminer la courbe de contact de la surface gauche générale avec la surface cylindrique, on mènera par les droites de la surface gauche, des plans parallèles à la génératrice du cylindre; ces plans toucheront cette surface en des points qui

appartiendront à la courbe de contact de la surface gauche générale et du cylindre.

61. *Exemple.* La surface d'une vis à filets triangulaires est engendrée par une droite qui passe par l'axe d'un cylindre droit à base circulaire, et qui se meut de manière que tous ses points décrivent des hélices de même pas. (*Voy.* §. IV). Les hélices décrites par tous les points de la droite appartiennent à des cylindres droits qui ont un axe commun. Ayant construit deux de ces hélices, on peut considérer la surface de la vis comme engendrée par une droite qui a pour lignes directrices ces deux hélices, et pour troisième directrice l'axe commun des cylindres sur lesquels les deux hélices sont tracées.

Les trois directrices sont coupées par une droite quelconque de la surface, en trois points par lesquels on mène des tangentes à ces directrices. L'axe commun des cylindres auxquels les hélices appartiennent, est sa propre tangente. Les tangentes aux deux hélices font avec les bases des cylindres sur lesquels elles sont tracées, des angles égaux, et sont contenues dans des plans tangens à ces cylindres; or ces plans tangens sont perpendiculaires au plan qui passe par l'axe des cylindres et par la droite génératrice de la surface; donc les trois tangentes aux directrices de cette droite sont parallèles à ce plan. D'où il suit (§. I, art. 14) que la droite mobile engendre un paraboloïde hyperbolique; et comme les trois directrices de cette droite sont toujours placées de la même manière l'une par rapport à l'autre, on doit conclure que la surface de la vis triangulaire est l'enveloppe de l'espace que parcourt un paraboloïde hyperbolique de forme constante. On déterminera sur chaque paraboloïde le point de contact de ce paraboloïde et du plan mené, ou par un point qui est donné pour sommet d'une surface conique,

ou parallèlement à une droite donnée ; la ligne qui joint les points de contact du plan et du paraboloïde, appartient à la courbe de contact de la surface de la vis et du cône dont on a le sommet, ou du cylindre qui est engendré par une droite dont la direction est connue.

---

§. IV.

De l'intersection des surfaces.

On a exposé (§. III, art. 48 — 58, G. D.) une méthode générale pour déterminer les projections des courbes et des tangentes aux courbes qui résultent de l'intersection des surfaces. L'application de cette méthode ne dispense pas dans chaque cas particulier, d'une *discussion* qui fasse connaître si la courbe est plane ; si elle a des points remarquables, et comment on les détermine ; si la courbe a plusieurs branches, et comment on distingue, parmi les points trouvés par la méthode générale, ceux qui appartiennent à la même branche. Enfin la discussion géométrique d'une courbe a encore pour objet de reconnaître si elle a des branches fermées ou infinies, et d'apprendre, lorsque les branches infinies ont des tangentes qu'on nomme *asymptotes*, à construire ces tangentes. Nous allons prendre pour exemple de cette discussion géométrique, les surfaces du second degré, et principalement celles de ces surfaces qui peuvent être engendrées par une droite, et que par cette raison on emploie le plus fréquemment dans les arts.

Des intersections de surfaces du second degré.

62. Deux sphères de rayons quelconques qui se pénètrent, se coupent suivant un cercle. En effet, tous les points de la courbe d'intersection étant à des distances égales de chaque centre, ils sont dans un plan perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres, et à égales distances du point où ce plan coupe la droite des centres; donc ils appartiennent à un cercle dont le centre est sur la droite qui joint les centres des deux sphères, et qui a pour rayon la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du cercle d'intersection sur la droite menée par les centres des sphères.

63. Une sphère d'un rayon infini est un plan, donc une sphère et un plan se coupent toujours suivant un cercle. Ce qu'on peut d'ailleurs démontrer directement, en supposant que la sphère et le plan donnés soient coupés par une suite de plans passant par le centre de la sphère, et par une perpendiculaire menée de ce centre sur le plan donné. Chacun de ces plans coupe la sphère suivant un grand cercle, et le plan donné suivant une droite. En ne considérant de cette droite que la portion qui sert de corde à ce grand cercle, les deux extrémités de cette corde appartiennent à l'intersection de la sphère et du plan; or dans tous les plans coupans, les cordes du grand cercle de la sphère situées dans le plan donné, sont de même longueur, donc ces cordes sont les diamètres du petit cercle d'intersection de la sphère et du plan.

Ainsi lorsqu'un plan coupe une sphère, la section est un cercle dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan; et réciproquement la

droite qui joint le centre d'une sphère et le centre d'un petit cercle de cette sphère est perpendiculaire au plan de ce petit cercle.

Lorsque deux plans coupent une sphère suivant deux petits cercles, les centres de ces cercles et le centre de la sphère déterminent la direction d'un troisième plan, qui est perpendiculaire aux deux premiers. Cette proposition est une conséquence de la précédente, puisque les droites menées par le centre de la sphère et par les centres des petits cercles de la sphère, sont perpendiculaires au plan de ces petits cercles.

64. *Par deux cercles d'une sphère, on peut faire passer deux cônes obliques.* Qu'on imagine par le centre de la sphère et par les centres des deux cercles donnés sur cette sphère, un plan qui coupe la sphère suivant un grand cercle ABCD (Pl. IV, *fig.* 1), et les plans des cercles donnés, suivant les droites AB, CD. Les cordes AB et CD des grands cercles ABCD, étant les diamètres des cercles donnés, on joindra les extrémités de ces cordes par deux droites AD, BC, qui se rencontrent en G, et par deux autres droites AC, BD, qui se croisent au point H. Les points G et H seront les sommets des deux cônes obliques menés par les deux cercles qui ont pour diamètres les droites AB, CD, et dont les plans sont perpendiculaires au plan des trois centres O, E, F. Pour démontrer cette proposition, admettons comme une propriété connue du cercle, qu'une corde et un diamètre étant perpendiculaires entre eux, la corde divise le diamètre en deux parties, telles que la moitié de la corde est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre. Ayant mené la droite HIK qui coupe les cordes AB et CD aux points I et K, et regardant cette droite comme la projection d'une arête du cône oblique dont le sommet

est en H, il s'agit de faire voir que cette arête s'appuie à-la-fois sur les deux cercles qui ont pour diamètres les cordes AB et CD.

Supposons qu'elle passe par le point du cercle du diamètre CD, qui se projette en I sur le plan des trois centres E, O, F; la demi-corde de ce cercle, menée par ce même point perpendiculairement au diamètre BD, est moyenne proportionnelle entre les deux parties CI, DI de ce diamètre. Ayant mené par le point I la droite LIM parallèle à AB, les deux triangles DIL, MIC sont semblables; car les angles ABC et LDC, qui ont pour mesure la moitié des arcs AD et DC, sont égaux; mais l'angle ABC est égal à l'angle LMC, donc les angles des deux triangles DIL et MIC sont égaux. La similitude des deux triangles donne la proportion DI : IL :: IM : IC; d'où il suit que DI $\times$ IC = IL $\times$ IM. Ainsi la demi-corde au point I est moyenne proportionnelle non-seulement entre les droites DI et IC, mais encore entre les parties IL et IM de la droite LM; donc cette droite LM est le diamètre d'un petit cercle de la sphère dont le plan est perpendiculaire à celui des trois centres E, O, F; mais dans un cône, toutes les sections parallèles sont semblables (§. I, art. 16); donc le plan mené par AB perpendiculairement au plan des trois centres E, O, F, coupe le cône dont le sommet est en H, suivant le cercle du diamètre AB. On démontrerait de la même manière que la droite, qui a pour projection sur le plan des trois centres E, O, F, la droite GI'K' s'appuie sur les deux cercles des diamètres AB et CD; donc par deux cercles quelconques donnés sur une sphère, on peut mener deux cônes obliques, dont les sommets sont sur le plan qui passe par le centre de la sphère et par les centres des cercles donnés.

Réciproquement étant donnés un cercle de la sphère, et un

point au dehors de cette sphère, le cône oblique qui a pour base le cercle et pour sommet le point, passe par un second cercle de la sphère dont le plan serait perpendiculaire à celui qu'on menerait par le sommet du cône, le centre de la sphère et le centre du cercle donné. Ce plan coupe le cône suivant deux arêtes, et l'angle compris entre ces deux arêtes est ce qu'on nomme la *section principale* du cône oblique. Cette section jouit de la propriété que l'une des deux arêtes qui la forment, fait avec les plans des deux sections circulaires du cône, des angles qui en général diffèrent entre eux, et qui, dans tous les cas, sont égaux aux angles de l'autre arête de la section principale avec les deux mêmes plans. Dans la *fig.* 1, Pl. 4, l'arête DILB fait avec les plans des cercles AB, DC des angles égaux à ceux que l'arête CHA fait avec les mêmes plans DC, AB; ainsi étant donné un cône oblique du second degré (§. I, art. 15), on voit d'après ce qui précède qu'il peut être engendré par un cercle de deux manières différentes, et qu'il n'y a aucun point par lequel on ne puisse mener deux cercles situés dans des plans dirigés dans des sens différens, et perpendiculaires au plan de la *section principale du cône*; ce qui est conforme à la proposition simplement énoncée §. I, art. 15.

65. Les plans de deux cercles d'une sphère étant parallèles, le cône qui passe par ces deux cercles, d'oblique qu'il eût été avant le parallélisme, devient un cône droit.

Si les deux cercles sont de même rayon et dans des plans parallèles, le cône droit se transforme en un cylindre droit. Lorsqu'une sphère est rencontrée par un cylindre à base quelconque qui la pénètre totalement, la courbe de pénétration est composée de deux branches égales et symétriquement placées par rapport au plan mené par le centre de la sphère perpendiculairement aux

arêtes du cylindre ; car il est évident que ce plan divise en deux parties égales toutes les cordes de la sphère dirigées suivant les arêtes du cylindre.

66. Lorsque la sphère et un cône oblique à base circulaire se pénètrent, la courbe d'intersection est composée de deux cercles situés dans deux plans différens. Cette proposition qui vient d'être démontrée, est une conséquence d'une autre plus générale. En effet l'intersection de deux surfaces quelconques du second degré qui se pénètrent, est en général composée de deux branches ; si l'une de ces branches est une courbe plane, l'autre branche est encore nécessairement plane, et les plans de ces deux courbes sont inclinés l'un par rapport à l'autre. On démontre cette proposition par l'analyse, et on en verra des applications dans la théorie des ombres.

L'intersection d'une surface quelconque du second degré par un plan, est une courbe du second degré qui jouit de la propriété de ne pouvoir être coupée par une droite qu'en deux points. En admettant cette propriété, on voit que tout plan qui coupera une surface du second degré suivant une droite, passera par une autre droite de cette surface, de sorte que le système de ces deux droites sera la section totale de la surface par le plan. C'est par cette raison que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique (§. I, art. 14) peuvent être engendrés par une droite de deux manières différentes. Le plan qui passe par une droite du premier système de génération, contient nécessairement une seconde droite appartenant au second système.

67. Il peut arriver que le cône oblique qui coupe une sphère ait pour sommet un point de cette sphère ; alors l'un des cercles d'intersection de ces deux surfaces est réduit au point qui est le

sommet du cône. Supposons que la droite **AB** (Pl. IV, *fig.* 1) et le point **O** restant les mêmes, la droite **DC** diminue de grandeur en restant parallèle à elle-même ; elle se réduira au point, qu'on prend par hypothèse pour sommet du cône, et qui appartient à la circonférence **ABCD**. Or dans cette hypothèse, les droites **OH**, **OF** se confondront ; donc tout plan perpendiculaire au rayon de la sphère mené par le sommet du cône, coupera ce cône suivant un cercle. En effet, soit **ACQ** (Pl. 4, *fig.* 2) la section principale du cône oblique qui a son sommet au point **C** de la surface de la sphère, et pour base le petit cercle du diamètre **AB** ; il est facile de voir que le plan **PQ**, perpendiculaire au rayon **OC** de la surface de la sphère, coupe le cône suivant un cercle du diamètre **RS** ; car les angles des arêtes **AC**, **BC** avec le plan **AB**, sont évidemment égaux aux angles de ces mêmes arêtes **BC**, **AC** avec le plan **PQ** ou **RS** (art. 64) ; donc **AB** et **RS** sont les traces des plans perpendiculaires au plan de la section principale du cône, qui coupent ce cône suivant des cercles.

68. C'est sur cette propriété du cône qui a pour sommet un point de la sphère et pour base un cercle de cette sphère, qu'est fondée la construction des cartes géographiques par la méthode des projections *stéréographiques*. D'après cette méthode, les lignes de projection sont des droites dirigées vers un point de la surface d'une sphère, et le plan de projection est perpendiculaire au rayon de la sphère qui correspond à ce point. Les lignes de projection menées vers les points d'un cercle de la sphère, appartiennent à un cône oblique, qui est coupé par le plan de projection suivant un cercle ; or ce dernier cercle est la projection du premier ; donc tous les cercles de la sphère sont représentés par d'autres cercles. La terre, considérée comme

une sphère, est divisée en méridiens et en parallèles à l'équateur, qui se projettent suivant d'autres cercles sur les cartes stéréographiques.

69. La projection stéréographique jouit encore d'une autre propriété très-remarquable ; l'angle formé par deux tangentes à la surface d'une sphère, ne diffère pas de sa projection stéréographique. Pour démontrer cette proposition, soit (Pl. 4, *fig.* 3), ABMN la base circulaire d'un cône droit : ayant mené par le sommet de ce cône une droite quelconque perpendiculaire à son axe, qu'on imagine par cette droite deux plans tangens au cône ; ces plans qui auront pour traces sur le plan de la base ABMN des droites parallèles AD, BD′, seront également inclinés par rapport à l'axe du cône. Maintenant si on suppose que chacun des deux plans tangens soit coupé par deux plans quelconques menés par l'axe du cône, l'angle formé par les deux droites d'intersection, sera de même grandeur dans chacun des deux plans tangens. En effet, les plans menés par l'axe du cône ont pour traces sur le plan de sa base deux droites quelconques, telles que CSC′, DSD′ passant par le centre S de cette base; or il est évident que les deux triangles qui ont pour sommet commun le sommet du cône, et pour bases les droites CD, C′D′, sont égaux ; donc les angles opposés à ces droites sont aussi égaux.

Réciproquement étant donnés deux plans quelconques A et B, lorsqu'on les coupe par deux autres plans C et D qui font avec l'intersection commune des deux premiers des angles égaux, et qui de plus passent par une droite perpendiculaire à cette intersection commune, les angles formés par les droites intersections des plans A et B et du plan C, sont égaux aux angles formés par les droites intersections

des mêmes plans A et B et du plan D. Ainsi les plans qui ont pour traces les droites CSC′, DSD′, et qui passent par l'axe S du cône droit, sont coupés par les plans tangens au cône, menés par les parallèles AD, BD′, suivant des droites qui comprennent entre elles le même angle. Les angles de ces droites ont pour projections orthogonales sur le plan de la base du cône droit, les angles égaux CSD, C′SD′.

70. Le centre O de la sphère (Pl. 4 *du Supplément*, *fig.* 4), le point C de cette surface vers lequel concourent les lignes de projections, et le point E sommet de l'angle qui a pour côtés les tangentes à projeter, déterminent la position d'un plan qui coupe la sphère suivant le grand cercle PCQE; la corde CE de ce cercle est l'intersection commune des deux plans menés par le point C et par les deux tangentes à projeter. L'angle de ces deux tangentes est dans un plan AE perpendiculaire au rayon OE, et par conséquent perpendiculaire au plan du grand cercle PCQE; la projection stéréographique de cet angle est dans un plan tel que POQ perpendiculaire au rayon OC. Il s'agit donc de faire voir que les deux plans qui ont pour traces sur le plan du cercle PCQ auquel ils sont perpendiculaires, les droites AE, PQ, coupent suivant des angles égaux les deux plans qui projettent l'angle des deux tangentes, et qui ont pour intersection commune la droite CE, corde du grand cercle PCQE. Les plans qui ont pour traces les droites AE, PQ, sont également inclinés par rapport à la droite CE; de plus ils passent l'un et l'autre par une droite perpendiculaire à cette droite CE, puisqu'ils sont tous deux perpendiculaires au plan du grand cercle PCQE qui contient cette droite; donc (art. 69) l'angle des tangentes contenu dans le plan AE ne diffère pas de la projection stéréographique de cet angle sur le plan PQ.

Des sections du cône du second degré.

71. En considérant le cône du second degré comme engendré par une droite mobile qui passe constamment par un même point, sommet du cône, et qui est dirigée dans son mouvement par un cercle, base de ce cône, les intersections successives de la droite mobile par un plan ou par une autre surface donnée, déterminent les points de la section faite dans le cône par cette surface. Lorsqu'un cône est coupé par un plan, ou toutes les arêtes sont rencontrées par le plan, ou le plan coupant est parallèle à une des arêtes du cône. Dans le premier cas, il est évident que la courbe est fermée, et on la nomme *ellipse ;* dans le second cas, la courbe a des branches infinies, puisqu'une droite parallèle à un plan n'a de point commun avec ce plan qu'à l'infini. Pour déterminer les arêtes d'un cône parallèle à un plan donné, on mène par le sommet du cône un plan parallèle au plan donné ; ou ce plan parallèle ne rencontrera pas la base circulaire du cône, ou il la coupera en deux points, ou enfin il lui sera tangent. Dans le premier cas, la section du cône est elliptique. Dans le second cas, la section est une *hyperbole* ; les deux nappes du cône sont rencontrées par le plan coupant, et chaque nappe contient une branche de l'hyperbole. Dans le troisième cas, la section est une *parabole* qui appartient à une seule nappe de la surface conique.

72. Connaissant les arêtes du cône parallèles au plan coupant, il sera facile de construire les tangentes qu'on nomme *asymptotes*, qui correspondent aux points de la section conique, situés à l'infini. En effet, la tangente en un point quelconque de la section

conique, résulte de l'intersection du plan tangent au cône en ce point, et du plan coupant : or le plan tangent en un point d'un cône touche le cône suivant l'arête qui passe par ce point, mais cette arête est connue, puisqu'elle est parallèle au plan coupant; donc si par cette arête on mène un plan tangent au cône, l'intersection de ce plan et du plan coupant sera l'asymptote. Lorsque la section est une hyperbole, le cône a deux arêtes parallèles au plan coupant ; à chaque arête correspond un plan tangent, donc l'hyperbole a deux asymptotes. Le point d'intersection des deux asymptotes est le *centre* de l'hyperbole. Il est évident que ce centre est aussi le point de rencontre du plan coupant et de la droite d'intersection des deux plans qui touchent le cône suivant les arêtes parallèles au plan coupant. L'hyperbole approche d'autant plus de se confondre avec ses asymptotes, que le plan de l'hyperbole approche davantage du sommet du cône. Enfin lorsqu'il passe par ce sommet, chaque branche de l'hyperbole devient une ligne droite.

La section du cône est une parabole, lorsque le plan coupant et le plan qui touche le cône suivant l'arête qui passe par le point situé à l'infini, sont parallèles; alors ces deux plans n'ont de points communs qu'à l'infini; d'où il suit que la parabole n'a pas d'asymptotes.

73. Tout ce qu'on vient de dire sur les courbes qui résultent de l'intersection d'un cône à base circulaire par un plan et sur les tangentes à ces courbes, s'applique également et au cône oblique et au cône droit. En supposant le cône droit coupé par un plan, si l'on mène par l'axe du cône un second plan perpendiculaire au premier, l'intersection de ces deux plans est dans la direction de l'une des droites qu'on a nommées *axes principaux* de la section conique (§. I, art. 10).

Soit MNPQ (Pl. 4, *fig.* 5) la base horisontale d'un cône droit coupé par un plan MN qui passe par l'axe S, suivant deux arêtes qui se projettent sur un plan vertical parallèle au plan coupant, en *sm* et *sn*. Soient AB, A'B', A''B'' les traces sur le plan vertical, et BC, B'C', B''C'' les traces sur le plan horisontal, de trois plans perpendiculaires au plan vertical, qui coupent le cône droit. La section elliptique est dans un plan tel que ABC, et la parabole dans un plan A''B''C'' parallèle au plan *sm*M tangent au cône. L'hyperbole est dans un plan A'B'C' qui coupe les deux nappes de la surface du cône droit. AB, A'B', A''B'' sont, dans cette figure, des droites parallèles aux axes principaux des trois sections coniques, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

L'ellipse, soit qu'elle résulte de l'intersection du cône ou du cylindre à base circulaire par un plan, est dans les deux cas une ligne du même genre, comme on peut s'en assurer en comparant cette ellipse au cercle qui aurait pour diamètre le grand axe de l'ellipse. En établissant cette comparaison, on a déja démontré l'égalité de la sous-tangente du cercle et de l'ellipse, lorsque cette ellipse a pour axe principal un diamètre du cercle (art. 62, G. D.).

74. Quelle que soit la base d'un cône, on construira la courbe d'intersection de ce cône et d'un plan, en les coupant par une suite de plans passant par le sommet du cône. Chacun de ces plans coupera le cône et le plan donné suivant des droites; les points communs à ces droites appartiennent à la courbe d'intersection cherchée. Si on donne une droite dans le plan qui coupe le cône, et si on demande les points de la courbe situés sur cette droite, on menera par le sommet du cône et par cette droite un plan; ce plan coupera le cône suivant

une ou plusieurs arêtes ; les points communs aux arêtes du cône et à la droite du plan seront évidemment sur cette droite.

Des sections de l'hyperboloïde de révolution.

75. De deux droites situées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre, la première étant fixe et la seconde mobile, la droite mobile en tournant autour de la droite fixe, comme axe de révolution, engendre la surface qu'on nomme *hyperboloïde de révolution à une nappe.* On démontre par l'analyse que la courbe méridienne de cette surface de révolution est une hyperbole, et c'est par cette raison qu'on lui a donné le nom d'hyperboloïde de révolution à une nappe, dont il a déja été question (§. I, art. 3 et 10).

Un cylindre droit qui a pour axe la droite fixe et pour base le cercle décrit avec un rayon égal à la plus courte distance de la droite fixe et de la droite mobile, touche la droite mobile dans toutes ses positions, et le point de contact de cette droite mobile et du cylindre, décrit le cercle qui sert de base au cylindre. En effet, si l'on conçoit la perpendiculaire aux deux droites fixe et mobile, le pied de cette perpendiculaire sur la droite mobile, décrit un cercle qui a pour centre le pied de la perpendiculaire sur la droite mobile. Dans ce mouvement, la droite mobile est toujours à la même distance de la droite fixe, donc elle touche le cylindre droit qui a pour axe la droite fixe et pour base le cercle d'un rayon égal à la plus courte distance de ces deux droites. Désignons ce cylindre par la lettre C.

La droite mobile touche le cylindre C en un point, et fait avec l'arête du cylindre menée par le point de contact un angle qui ne varie pas, quelle que soit la position de la droite mobile.

Si on suppose que cette droite, sans cesser d'être dans le plan qui touche le cylindre C au même point, change de côté par rapport à l'arête de contact, de manière que cette arête divise en deux parties égales l'angle formé par la droite mobile primitive et cette même droite transposée ; alors les deux côtés de cet angle seront symétriquement placés par rapport à la droite fixe ; ils seront également distans de cette droite, et en tournant ensemble autour d'elle, ils engendreront la même surface de révolution, puisqu'elle sera composée de cercles qui auront mêmes centres et mêmes rayons. D'où il suit que l'hyperboloïde de révolution peut être engendrée par une droite de deux manières différentes ; dans chaque système de génération, la droite mobile touche le cylindre droit qui a pour axe la droite fixe et pour base le cercle décrit avec un rayon égal à la plus courte distance de la droite fixe et de la droite mobile ; l'angle de la droite mobile et du plan de la base du cylindre est constant.

76. *Problème.* Etant donnée la projection d'un point de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, construire une seconde projection de ce point sur un plan méridien de la surface.

Solution. Soient O, *oa* (Pl. 4, *fig.* 6) les projections horisontale et verticale de l'axe de révolution ; AB, *ab* celles de la génératrice, ACD le cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à la plus courte distance des deux droites fixe et mobile ; *sat* la projection verticale de ce cercle. On donne la projection horisontale M d'un point de l'hyperboloïde, et on demande sa projection sur le plan vertical *ef* parallèle au plan méridien EF.

BEF étant la circonférence du cercle que décrit le point B de la génératrice sur le plan horisontal, on menera par le point M la droite UMTV qui touche le cercle ACD au point T et qui coupe le cercle BEF aux points U et V. Le plan vertical UMTV coupe l'hyperboloïde suivant deux droites qui se croisent au point T, *t*, et dont les projections verticales sont les droites *vt*, *ut*; or l'une ou l'autre de ces droites contient la projection verticale correspondante au point M, donc cette projection est sur la verticale M*mm'* en *m* ou *m'*, à égales distances de l'horisontale *st*. On aurait pu mener par le point M la tangente RSQ au cercle ACD, et concevoir par cette tangente un plan vertical qui aurait coupé l'hyperboloïde suivant deux droites qui se croiseraient au point S, *s*, et dont les projections verticales seraient *rs* et *qs*, coupées par la verticale M*mm'* aux points *m* et *m'*, déja trouvés sur les droites *vt*, *ut*.

77. *Problême.* Connaissant les deux projections d'un point de l'hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical, mener par ce point un plan tangent à l'hyperboloïde.

Solution. Soient M et *m* les deux projections du point donné : les deux génératrices qui passent par ce point déterminent la position du plan tangent ; or ces génératrices coupent le plan horisontal aux points R et U, donc le plan tangent au point M, *m* a pour trace sur le plan horisontal la droite UR. Ce plan satisfait à la condition d'être perpendiculaire au méridien OM, qui passe par le point de contact M, *m*, car la droite UR est perpendiculaire à OM ; d'où il suit que connaissant le point d'intersection R ou U d'une des génératrices avec le plan horisontal, on aura la trace du plan qui touche la surface en un point de cette génératrice, en élevant par le point R ou U

une perpendiculaire sur la trace du plan méridien mené par le point connu sur la génératrice.

Le point M étant toujours la projection horisontale d'un point de l'hyperboloïde, si m' en est la projection verticale, le plan tangent au point M, m' coupera le plan horisontal suivant la droite QV, corde du cercle QVUR perpendiculaire à la trace OM du méridien mené par le point M, m'.

Il suit de là que tout plan mené par une droite quelconque de l'hyperboloïde de révolution, touche cette surface au point où la droite coupe le plan méridien auquel le plan tangent est perpendiculaire.

78. *Problême.* Étant donnés un hyperboloïde de révolution et un plan qui coupe cette surface, construire la courbe d'intersection.

Solution. Ayant mené une suite de plans perpendiculaires à l'axe de révolution, chacun de ces plans coupe la surface de révolution suivant un cercle, et le plan coupant suivant une droite; les points communs au cercle et à la droite appartiennent à la courbe d'intersection. Autrement on considérera l'hyperboloïde comme engendré par une droite mobile; cette droite dans une position quelconque rencontre le plan coupant en un point qui appartient à la même courbe d'intersection. On construit la tangente en un point quelconque de cette courbe, en menant le plan tangent en ce point (art. 77) et en cherchant l'intersection de ce plan et du plan de la courbe.

La courbe d'intersection de l'hyperboloïde et du plan étant supposée construite, un plan méridien quelconque coupe cette courbe en deux points. Lorsque le plan méridien est déterminé, on peut construire directement ces deux points par la consi-

dération suivante : l'intersection du plan méridien et du plan qui coupe l'hyperboloïde, est une droite qui passe par l'axe de révolution ; si on fait mouvoir cette droite autour de l'axe, elle engendre un cône droit ; ce cône et l'hyperboloïde ayant même axe, se coupent suivant un cercle, et ce cercle contient les points demandés. Pour déterminer la position de ce cercle, on cherchera le point d'intersection de la génératrice dans une position quelconque et du cône droit (art. 74) ; par ce point, on menera un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, qui coupera l'hyperboloïde suivant un cercle d'un rayon égal à la distance du point à l'axe de révolution. Les points communs à ce cercle et au meridien sont les points demandés.

79. *Problême.* L'hyperboloïde de révolution étant une surface du second degré, toutes ses sections planes sont des courbes du même degré ; on propose de déterminer quelle doit être la position du plan coupant par rapport à la surface, pour obtenir ou une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole.

Solution. Etant donnée la droite fixe et la droite mobile génératrice de la surface, on menera par un point quelconque de la droite fixe une parallèle à la droite mobile, et on supposera que cette parallèle tourne en même tems que la droite mobile autour de la droite fixe. La droite mobile engendrera l'hyperboloïde de révolution, et sa parallèle décrira un cône droit, tel qu'il n'y a aucune droite sur l'hyperboloïde qui n'ait sa parallèle sur le cône.

Cela posé, on menera par le sommet de ce cône un plan parallèle au plan coupant dont la position, par rapport à l'hyperboloïde, est connue. Ou ce plan n'aura de commun avec le cône que le sommet, ou il le coupera suivant deux arêtes,

ou enfin il le touchera. Dans le premier cas, la section est une ellipse, dans le second une hyperbole, et enfin dans le troisième c'est une parabole. Supposons que le plan coupe le cône suivant deux arêtes, et qu'on ait projeté ces arêtes sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Il sera facile de trouver les deux positions de la droite génératrice pour lesquelles cette droite est parallèle aux arêtes, et par conséquent parallèle au plan coupant. Or les points de la courbe d'intersection correspondant à ces deux positions, sont à une distance infinie; donc les droites intersections des plans tangens en ces points, et du plan de la courbe, seront les asymptotes de cette courbe.

Pour déterminer le plan tangent en un point de la génératrice, situé à une distance infinie, il faut remarquer que ce point est nécessairement dans un plan méridien (art. 77), parallèle à la génératrice sur laquelle ce point est situé. Donc si on mène par la génératrice parallèle au plan coupant, un plan perpendiculaire au plan méridien qui lui est parallèle, ce plan touchera la surface en un point situé à l'infini sur la génératrice, et l'intersection de ce plan et du plan coupant sera l'asymptote. Répétant les mêmes constructions pour la seconde position de la droite génératrice, dans laquelle cette droite est parallèle au plan coupant, on obtiendra la seconde *asymptote*.

80. Lorsque le plan de la section de l'hyperboloïde est parallèle au plan qui touche le cône droit suivant une arête, ces deux plans sont perpendiculaires au plan méridien qui passe par l'arête de contact; or cette arête est parallèle à la génératrice de l'hyperboloïde sur laquelle est le point de la section, situé à l'infini; donc (art. 77) le plan qui touche l'hyperboloïde en ce point, est parallèle au plan qui touche le cône droit, et

par conséquent au plan coupant ; donc la tangente en ce point de la section de l'hyperboloïde, est située à une distance infinie ; d'où il suit que la section n'a pas d'asymptote, propriété qui distingue la parabole des autres courbes du second degré.

Des sections planes du paraboloïde hyperbolique.

81. Le paraboloïde hyperbolique est une surface (§. I, art. 14) engendrée par une droite mobile, qui s'appuie sur deux droites fixes, et qui est constamment parallèle à un même plan. Cette surface étant du second degré, elle peut (art. 66), être engendrée par une droite de deux manières différentes. On démontre par une analyse très-simple, que dans les deux systêmes de génération, la droite mobile est parallèle à un plan dont la direction est déterminée pour chaque systême.

Soient A et B deux droites fixes, et P le plan qui leur est parallèle. En menant une suite de plans parallèles à un plan donné P', chacun de ces plans coupe les deux droites A et B en deux points, qui déterminent la position d'une droite parallèle au plan P'. Nommons A' et B' deux parallèles au plan P', qui s'appuient sur les droites A et B. On engendre le même paraboloïde, soit qu'on prenne les droites A', B' pour directrices d'une droite mobile constamment parallèle au plan P, ou les droites A et B pour directrices d'une droite mobile constamment parallèle au plan P'.

Les directrices A, B et A', B' peuvent être remplacées par deux droites quelconques du paraboloïde, prises dans l'un ou l'autre systême de génération de cette surface.

Chacun des plans parallèles au plan donné P', contient une génératrice de la surface ; donc la génératrice, pour ce premier systême de génération, s'appuie sur la droite située à

l'infini vers laquelle concourent tous les plans parallèles à P′. Par la même raison, la génératrice, dans le second système de génération, s'appuie sur la droite située à l'infini, vers laquelle concourent tous les plans parallèles à P. Donc on peut regarder le paraboloïde hyperbolique comme engendré par une droite qui s'appuie constamment sur trois autres comme directrices, et en effet cette surface est ce que devient l'hyperboloïde à une nappe (§. I, art. 14), engendré par une droite qui s'appuie sur trois autres, lorsque la génératrice n'étant assujettie qu'à s'appuyer sur deux des trois directrices, on substitue à la troisième directrice un plan, auquel la génératrice doit être constamment parallèle.

82. *Problème.* Le paraboloïde hyperbolique étant coupé par un plan, suivant une courbe du second degré, on propose de déterminer le genre de la courbe d'intersection.

Solution. Supposons, 1°. que le plan sécant passe par une droite de la surface, il contiendra (art. 66) une seconde droite de cette même surface, et il la touchera au point de rencontre de ces deux droites.

2°. Que le plan sécant coupe les deux plans que nous avons désignés dans l'article précédent par les lettres P et P′, suivant deux droites p et p'. On déterminera la parallèle à p, qui s'appuie sur les deux directrices A′ et B′, parallèles au plan P′, et la parallèle à p' qui s'appuie sur les directrices A et B, parallèles au plan P. Pour construire ces parallèles, on menera par la droite A′ et par une parallèle à p un plan qui coupera la droite B′ en un point par lequel on menera la génératrice parallèle à p; on menera par la droite A et par une parallèle à p', un plan qui coupera la droite B en un point par lequel on

menera la génératrice parallèle à p'. Les génératrices parallèles aux droites p et p' sont nécessairement parallèles au plan sécant qui contient ces droites ; or les points de la courbe d'intersection du paraboloïde et d'un plan, sont ceux où les génératrices du paraboloïde coupent ce plan; donc quel que soit le plan sécant, il y a deux points de l'intersection placés à une distance infinie sur les génératrices parallèles à ce plan ; d'où il suit qu'un paraboloïde ne peut pas être coupé par un plan suivant une courbe fermée ; donc les sections planes de cette surface sont des paraboles ou des hyperboles. Nous allons démontrer que les plans parallèles à la droite d'intersection des plans P et P' auxquels les génératrices du paraboloïde sont parallèles, coupent cette surface suivant des paraboles, et que tout autre plan le coupe suivant une hyperbole.

83. Le plan sécant coupe les plans P et P' suivant deux droites. Les génératrices parallèles à ces droites contiennent (art. 82) les points de la courbe d'intersection placés à une distance infinie, et si les plans qui touchent la surface en ces points coupent le plan sécant, les droites intersections de ces plans seront les asymptotes de la courbe d'intersection du paraboloïde et du plan qui coupe cette surface ; d'où il suit que cette courbe sera une hyperbole. Soit G la génératrice parallèle à l'intersection du plan P et du plan sécant; un plan quelconque X mené par la droite G, coupe une droite g du même système de génération en un point ; le plan parallèle au plan P' mené par ce point, coupe la droite G au point de contact du plan quelconque X et du paraboloïde; donc si le plan X est parallèle au plan P, il sera aussi parallèle à toutes les droites, telles que g, qui sont parallèles à ce plan P; donc il touchera le paraboloïde en un point placé à une distance infinie sur la droite G ; donc

l'intersection de ce plan tangent et du plan qui coupe le paraboloïde, sera l'asymptote de la section faite par ce dernier plan.

Si G′ est la génératrice parallèle à l'intersection du plan P′ et du plan sécant, le plan mené par la droite G′ parallèlement au plan P′ coupera le plan sécant suivant une droite qui sera la seconde asymptote; donc quel que soit le plan qui coupe le paraboloïde suivant une hyperbole, les asymptotes de cette hyperbole seront parallèles aux droites intersections du plan sécant et des plans P et P′. Mais lorsque le plan sécant sera parallèle à la droite d'intersection des plans P et P′, il est évident que les asymptotes seront parallèles entre elles; de plus elles seront situées à une distance infinie, car les deux génératrices parallèles à l'intersection des plans P et P′, sont à une distance infinie de cette intersection : donc les plans menés par ces génératrices parallèlement aux plans P et P′, ne peuvent rencontrer le plan sécant que suivant des droites situées à l'infini; or ces droites sont les asymptotes : donc lorsque le plan coupant est parallèle à la droite d'intersection des deux plans auxquels la génératrice du paraboloïde est parallèle, la section est une parabole; le plan coupant dans toute autre direction donne une hyperbole, et dans aucun cas la section ne peut être une *courbe fermée*.

Que la courbe soit une parabole ou une hyperbole, on obtient la tangente en un point quelconque de cette courbe, en construisant l'intersection commune du plan qui touche le paraboloïde en ce point, et du plan de la courbe.

Des sections planes de l'hyperboloïde à une nappe.

84. On a vu (art. 56, 57) tout ce qui est relatif à la génération de cette surface et à son plan tangent. Si, par un point quelconque de l'espace, on mène des parallèles à cinq droites de l'hyperboloïde, qui appartiennent au même système de génération, on prouve par l'analyse que le cône du second degré qui passe par ces cinq droites, jouit de cette propriété qu'il n'y a aucune droite sur l'hyperboloïde qui n'ait sa parallèle sur le cône. En supposant cette propriété démontrée, et ayant construit le cône, il sera facile de reconnaître l'espèce de courbe qui résulte de l'intersection de l'hyperboloïde et d'un plan donné; car après avoir mené par le sommet du cône un plan parallèle au plan donné, ou ce plan n'aura de commun avec le cône que le sommet, ou il sera tangent, ou il contiendra deux arêtes du cône. Les sections correspondantes à ces trois hypothèses sont ou des ellipses, ou des paraboles, ou des hyperboles.

Lorsque la section est une hyperbole, il y a sur l'hyperboloïde deux droites parallèles au plan coupant, et en supposant ces droites déterminées, on pourra construire les asymptotes à l'hyperbole. En effet soit A l'une des droites, B et C deux autres droites quelconques appartenant, ainsi que A, au même système de génération. Tout plan passant par A coupe la droite B et C en deux points; la droite qui joint ces deux points, et la droite A déterminent la position d'un plan, qui touche la surface au point de rencontre de ces deux droites. Si par les droites B et C et parallèlement à la droite A, on mène deux plans, l'intersection de ces deux plans sera parallèle à A et s'appuiera sur les droites B et C; donc si par cette intersection

et par la droite A on mène un plan, il touchera la surface en un point de la droite A situé à l'infini; donc l'intersection de ce plan et du plan coupant sera l'asymptote de l'hyperbole. En raisonnant de la même manière sur la seconde droite A′ parallèle au plan coupant, on construira deux autres droites quelconques B′, C′ du même système de génération ; on menera par ces droites des plans parallèles à la droite A′; par l'intersection de ces plans et par la droite A′ on fera passer un plan qui coupera le plan de l'hyperbole suivant la seconde asymptote.

Le cône du second degré qui sert à distinguer le genre des sections planes de l'hyperboloïde à une nappe, devient un cône droit à base circulaire, lorsque l'hyperboloïde est de révolution.

85. La projection d'un point de l'hyperboloïde à une nappe étant donnée, pour trouver l'autre projection, il faut construire l'intersection de cet hyperboloïde, et d'une droite qui est perpendiculaire au plan de projection, et qui passe par le point donné sur ce plan. Si par une droite quelconque, on mène un plan qui coupe la génératrice de l'hyperboloïde dans ses différentes positions, la courbe du second degré qui passe par tous les points d'intersection, est rencontrée par la droite en deux points, dans lesquels cette droite coupe l'hyperboloïde. Donc étant donnée la projection horisontale d'un point de l'hyperboloïde, si par la verticale qui passe par cette projection, on mène un plan qui coupe l'hyperboloïde suivant une courbe du second degré, la projection verticale de cette courbe contiendra la seconde projection du point de l'hyperboloïde; donc ce point sera déterminé.

En faisant usage des propriétés des courbes du second de-

gré, on ne construit que cinq points de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde et du plan mené par la droite, et on trouve directement le point de la courbe qui se trouve sur cette droite. (*Voyez* la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tome Ier., page 434).

De l'intersection de deux surfaces cylindriques du second degré.

86. Une ligne droite qui reste toujours parallèle à une droite donnée, pendant qu'elle se meut en s'appuyant sur une courbe du second degré, engendre une surface cylindrique du second degré.

Lorsque deux surfaces cylindriques à base quelconque, se pénètrent, chaque point de la courbe d'intersection est commun aux deux arêtes des cylindres, qui se croisent en ce point; or, les plans menés par ces arêtes sont parallèles entre eux; donc étant données deux surfaces cylindriques, si on les coupe par une suite de plans parallèles aux deux droites parallèles aux génératrices de ces surfaces, chacun de ces plans contiendra des arêtes des cylindres, qui se rencontreront en des points de la courbe d'intersection des deux surfaces cylindriques. Les bases des surfaces cylindriques étant des courbes fermées, un point de la courbe d'intersection ne peut être situé à l'infini, que lorsque des arêtes prises sur les cylindres qui se pénètrent, sont parallèles; mais deux arêtes ne peuvent être parallèles entre elles, à moins que toutes les arêtes de l'un des cylindres ne soient parallèles aux arêtes de l'autre; or, dans cette hypothèse du parallélisme des arêtes, les cylindres se coupent suivant des lignes droites; donc, quelles que soient les courbes qui dirigent les droites génératrices des deux surfaces, pourvu qu'elles soient à branches fermées pour l'un et l'autre cylindre, les

branches de la courbe d'intersection sont toujours fermées; ou elles se réduisent à des lignes droites.

87. Connaissant les traces des surfaces cylindriques et du plan parallèle aux droites génératrices de ces surfaces, sur l'un des plans de projection, les tangentes aux traces des surfaces cylindriques parallèles à la trace du plan parallèle aux droites génératrices, déterminent les limites des plans qui coupent à-la-fois les deux surfaces cylindriques; car si les traces de ces plans ne rencontraient aucune des deux traces des surfaces cylindriques, les plans ne contiendraient aucune arête de ces surfaces, et pour qu'ils contiennent des arêtes de l'un et l'autre cylindre, il faut que leurs traces soient des sécantes des bases de ces cylindres; or, il est évident que les sécantes ont pour limites les tangentes à l'une ou à l'autre des deux bases; donc les traces des plans par lesquels on détermine les différens points de la courbe d'intersection des deux cylindres, ont pour limites ces tangentes. Elles n'auront pas de limites, lorsque les bases des surfaces cylindriques, données sur l'un des plans de projection, seront des courbes à branches infinies, telles qu'il n'y ait aucun plan parallèle aux arêtes des deux cylindres, qui ne coupe à-la-fois ces deux cylindres; dans ce cas la courbe d'intersection sera formée d'une ou plusieurs branches infinies, quoique les arêtes des cylindres qui se pénètrent, ne soient point parallèles.

88. Les surfaces cylindriques du second degré ont pour bases ou pour traces sur l'un des plans de projection, des courbes du second degré, auxquelles on sait mener des tangentes parallèles à des droites données. Ayant à construire la courbe d'intersection de deux cylindres du second degré, on déterminera d'abord la

trace du plan parallèle aux arêtes de ces cylindres; ensuite on mènera des parallèles à cette trace qui toucheront l'une des bases des cylindres en des points connus, et seront sécantes de l'autre base en d'autres points. Les arêtes correspondantes aux points de contact des tangentes et aux extrémités des sécantes, se rencontrent en des points qui appartiennent à la courbe d'intersection des deux cylindres; et il est à remarquer que les arêtes correspondantes aux extrémités des sécantes, sont des tangentes à cette courbe, car elles peuvent être considérées comme les intersections des plans tangens aux cylindres, menés par les points de la courbe d'intersection, situés sur ces arêtes. Ainsi, les opérations qui déterminent ces points, donnent à-la-fois les tangentes en ces points, et les limites des plans parallèles aux arêtes des deux cylindres, qui contiennent des points de la courbe d'intersection de ces deux cylindres.

De l'intersection de deux surfaces coniques du second degré.

89. La surface conique du second degré est engendrée par une droite qui passe constamment par un même point qui en est le sommet, et qui s'appuie sur une courbe du second degré qu'on nomme *base du cône.*

La méthode pour trouver l'intersection de deux cônes, consiste à mener une suite de plans par la droite qui joint leurs sommets; chaque plan coupe les cônes suivant des droites, et les points où ces droites se croisent, appartiennent à la courbe d'intersection des deux cônes. Lorsque les bases des cônes sont des courbes du second degré fermées, la courbe d'intersection est comprise entre deux plans menés par la droite qui joint les sommets des deux cônes; ces plans touchent un seul cône; ou ils sont tangens à l'un des cônes et sécans de l'autre;

ou enfin ils touchent les deux cônes à-la-fois. Lorsqu'un plan touche l'un des cônes suivant une droite, et qu'il coupe l'autre cône suivant deux autres droites, ces dernières sont des tangentes à la courbe d'intersection, aux points où elles se croisent avec la première.

Deux surfaces cylindriques dont les bases sont des courbes du second degré fermées, ne peuvent se couper (art. 86) que suivant une courbe à une ou deux branches fermées, ou suivant quatre lignes droites. La courbe d'intersection de deux surfaces coniques qui ont pour bases des courbes du second degré est composée de branches fermées ou infinies, selon la position respective des cônes.

90. *Problême.* Etant donnés deux cônes du second degré qui se pénètrent, déterminer le nombre des asymptotes de la courbe d'intersection des deux cônes.

Solution. L'un des cônes étant fixe, supposons que l'autre se meuve parallèlement à lui-même, et prenne une position telle que les deux sommets coïncident. Alors, si on les coupe par un même plan, les sections qui en résultent sont des courbes du second degré, qui peuvent :

1°. Se couper en quatre points;
2°. Se couper en deux points, et se toucher en un autre point,
3°. Se toucher en deux points;
4°. Se couper en deux points,
5°. Se toucher en un seul point;
6°. N'avoir aucun point commun, ce qui présente six cas que nous allons examiner.

Nommons A et B les deux cônes donnés, B' le second cône B

transporté parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que son sommet coïncide avec le sommet du premier cône A.

91. On suppose, 1°. que les bases des cônes A et B′ ont quatre points communs; il suit de cette hypothèse que ces deux cônes se coupent, suivant quatre arêtes; or ces arêtes ont leurs parallèles sur le cône B; donc les cônes A et B ont quatre arêtes parallèles, sur lesquelles se trouvent les points de la courbe d'intersection de ces deux cônes, qui sont situés à l'infini; donc les plans tangens menés par les arêtes parallèles de l'un et l'autre cône, se coupent suivant quatre droites parallèles aux mêmes arêtes, qui sont les asymptotes de la courbe d'intersection.

2°. Les cônes A et B′ se coupent selon deux arêtes, et se touchent suivant une troisième arête. Dans cette hypothèse, les cônes A et B ont trois arêtes parallèles; les plans tangens à ces cônes suivant les deux premières arêtes, se coupent en deux droites qui sont asymptotes de la courbe d'intersection. Les plans tangens suivant la troisième arête sont parallèles et ne se rencontrent pas.

3°. Les cônes A et B′ se touchent suivant deux arêtes; ce qui indique que les cônes A et B ont deux arêtes parallèles, et que les plans tangens à ces cônes suivant ces arêtes sont parallèles entre eux; donc, dans ce cas, la courbe d'intersection n'a pas d'asymptote.

4°. Les cônes A et B′ se coupent selon deux arêtes. La courbe des deux cônes A et B a deux asymptotes.

5°. Les cônes A et B′ se touchent suivant une arête. La courbe d'intersection des deux cônes A et B n'a pas d'asymptote.

6°. Les cônes A et B′ n'ont aucune arête qui leur soit commune. Les cônes A et B n'ont alors aucune arête paral-

lèle; toutes les branches de la courbe d'intersection sont fermées, et elles n'ont point d'asymptotes.

D'où l'on voit que la courbe d'intersection de deux surfaces coniques du second degré a quatre ou deux asymptotes; qu'elle peut être composée de branches infinies hyperboliques qui ont des asymptotes, et de branches infinies paraboliques, qui n'ont pas d'asymptotes.

Lorsque deux cylindres se pénètrent, il suffit que l'un des cylindres ait pour base une courbe à branches infinies, pour que la courbe d'intersection puisse s'étendre à l'infini; il n'en est pas de même de deux cônes. Quelles que soient les courbes qui leur servent de bases, qu'elles soient à branches fermées ou infinies, la courbe d'intersection des deux cônes ne s'étendra à l'infini, que lorsque les cônes auront des arêtes parallèles.

92. Dans l'intersection de deux cônes du second degré, le nombre de branches fermées, des branches infinies avec asymptotes, et des branches infinies sans asymptotes, dépend de la position respective des deux cônes; de quelque manière que ces branches soient combinées entre elles, leurs projections ne peuvent être coupées au plus qu'en quatre points par une ligne droite.

Lorsque le sommet de l'un des cônes est sur la surface de l'autre cône, alors ce sommet est un des points de la courbe d'intersection, et dans la projection de cette courbe, il tient lieu d'une branche. Cet exemple fait voir en géométrie ce que dans l'application de l'analyse à la géométrie, on entend par *point isolé*.

Le sommet de l'un des cônes étant sur la surface de l'autre cône, si de plus ces deux cônes ont une arête qui leur soit commune, cette arête sera une des branches de la courbe d'in-

tersection, et les branches qui complettent cette courbe ne pourront être coupées par une droite qu'en trois points.

De l'intersection du cône et du cylindre, qui ont pour bases des courbes du second degré fermées.

93. Pour connaître la forme de la courbe qui résulte de l'intersection de ces deux surfaces ; on menera par le sommet du cône une parallèle à la génératrice du cylindre, et on construira le point d'intersection de cette parallèle avec la courbe du second degré, trace du cône sur l'un des plans de projection. Ou ce point se trouvera hors du contour de la courbe, ou sur ce contour. S'il est hors du contour, on conclura que le cylindre et le cône n'ont aucune arête parallèle, et que la courbe qui résulte de leur pénétration est nécessairement composée de branches fermées. S'il est sur le contour, toutes les arêtes du cylindre seront parallèles à une arête du cône, et le plan tangent au cône suivant cette arête, sera un *plan asymptotique* de la courbe d'intersection du cylindre et du cône.

---

§. V.

Des courbes à double courbure, décrites par un point qui se meut d'après une loi donnée.

94. La tangente à une courbe à double courbure, qui résulte de l'intersection de deux surfaces est, à-la-fois, sur les plans qui touchent les deux surfaces, au point de la courbe que l'on considère; d'où il suit que la tangente en ce point est

la droite d'intersection de deux plans tangens. On fait usage dans les arts de plusieurs courbes, qui sont données par la loi du mouvement d'un point générateur, et dont il faut déterminer les tangentes par des considérations particulières; de ce nombre sont l'*hélice*, et l'*épicycloïde* sphérique. L'hélice est une ligne courbe tracée sur un cylindre à base quelconque, telle qu'en développant ce cylindre, elle devienne une ligne droite. Un point qui se meut sur un cylindre, de manière que la ligne décrite fasse constamment avec les arêtes du cylindre, le même angle, engendre l'hélice. Pour construire cette courbe, on la rapporte à deux plans, l'un horisontal perpendiculaire aux arêtes du cylindre, et l'autre, vertical. Le plan horisontal coupe le cylindre sur lequel l'hélice est tracée, suivant une courbe qu'on divise en parties égales, de manière que l'un des points de division soit l'origine de l'hélice; il est évident que cette courbe est la projection horisontale de l'hélice. Un arc quelconque d'hélice, compté de l'origine de cette courbe, la projection horisontale de cet arc, et une arête du cylindre comprise entre cette projection horisontale et l'extrémité de l'arc d'hélice, forment sur la surface cylindrique une figure de trois côtés, telle que le rapport des deux derniers côtés, est une quantité constante. La valeur de ce rapport détermine l'angle que chaque tangente à l'hélice fait avec l'arête du cylindre qui correspond à cette tangente. Supposons ce rapport connu; pour construire la projection verticale de l'hélice, on marquera les points de division de sa projection horisontale, des chiffres 0, 1, 2, 3, etc. (Pl. 5, *fig.* 1). La division comprise entre 0 et 1, la longueur de l'arête du cylindre qui passe par le point 1 et par un des points de l'hélice, sont dans un rapport connu; donc, si on porte sur la projection verticale de l'arête du cylindre, et à partir du point où cette projection rencontre l'intersection du plan

horisontal et du plan vertical, la longueur de l'arête; on aura la projection verticale d'un point de l'hélice. On construira tant d'autres points qu'on voudra de la projection verticale de l'hélice, en observant que les points de l'hélice qui se projettent sur le plan horisontal aux points 2, 3, 4, etc., sont élevés au-dessus de ce plan d'une quantité double, triple, etc., de celle dont le point projeté en 1, est élevé au-dessus de ce même plan. Dans le développement du cylindre, l'hélice devient l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés adjacens à l'angle droit, 1°. le développement de la projection horisontale de l'hélice, 2°. l'arête verticale du cylindre comprise entre le point extrême de l'hélice et la projection horisontale de ce point. D'où il suit que pour mener une tangente à une hélice par un point donné de cette courbe; il faut par ce point mener un plan tangent au cylindre, et construire dans ce plan un triangle rectangle, semblable à celui qu'on obtient sur le développement du cylindre. A partir du point donné de l'hélice, on porte sur l'arête verticale qui passe par ce point, une longueur quelconque; à l'extrémité de cette arête, qui est le sommet de l'angle droit du triangle, on élève une perpendiculaire à l'arête, sur laquelle on porte une autre longueur, qui soit à la première dans le rapport de la division o 1, à la différence des hauteurs verticales des points qui se projettent sur le plan horisontal en o et 1; l'hypothénuse de ce triangle rectangle est la tangente à l'hélice.

95. Lorsque l'hélice est tracée sur un cylindre dont la section perpendiculaire aux arêtes est une courbe fermée sans nœud, un cercle, par exemple, le point générateur de l'hélice coupe la même arête du cylindre en une infinité de points qui sont équidistans; la distance qui sépare un quelconque de ces points

du suivant, est ce qu'on nomme le *pas* de l'hélice : dans le développement du cylindre, l'hélice devient l'hypothénuse d'un triangle rectangle, qui a pour premier côté adjacent à l'angle droit la circonférence du cercle base du cylindre, et pour second côté, le pas de l'hélice.

96. *Problême.* Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre à base circulaire, mener une tangente à cette hélice, parallèle à un plan dont la position est déterminée.

Solution. Toutes les tangentes à l'hélice sont également inclinées par rapport aux arêtes du cylindre sur lequel elle est tracée ; or, dans un cône droit dont l'axe est parallèle aux arêtes du cylindre, tous les côtés font avec l'axe le même angle, donc il n'y a aucune tangente à l'hélice, qui n'ait sa parallèle sur la surface de ce cône droit. Ayant construit ce cône, on menera par son sommet un plan parallèle au plan dont la position est connue, et s'il coupe le cône droit suivant deux arêtes, les tangentes demandées seront parallèles à ces arêtes. Connaissant la direction des tangentes, on détermine les points où elles touchent l'hélice, en observant que les projections des tangentes à l'hélice sur le plan de la base circulaire du cylindre, sont des tangentes à cette base.

97. Soient O le centre (Pl. 5, *fig.* 1) et O8 le rayon d'un cercle, base d'un cylindre vertical sur lequel un point décrit une hélice. Soit o l'origine de cette hélice : à partir de ce point, on divise la circonférence de la base du cylindre en parties égales o1, 12, 23, 34, etc. o4 étant le quart de la circonférence, le point générateur s'élèvera en décrivant l'arc d'hélice qui se projette en o4, du quart du pas de l'hélice. La tangente

à l'hélice à l'extrémité de cet arc, se projette sur le plan horisontal en 4L, et si on développe l'arc o 1 2 3 4 de 4 en L; le point L est le pied de la tangente sur le plan horisontal. L'intersection YY′ des plans horisontal et vertical de projection, étant parallèle à la droite 4L, le point de l'hélice qui se projette en 4 sur le plan horisontal, se projette sur le plan vertical en *d*, à une hauteur 4′*d* égale au quart du pas de l'hélice. Le pied L de la tangente se projette en *l*; donc si on joint les points *l* et *d* par une droite, cette droite est une projection verticale de la tangente à l'hélice au point 4, *d*. Divisant la verticale 4′*d* en quatre parties égales, et menant par les points de division des droites horisontales, ces droites contiennent les projections verticales *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, etc., des points de l'hélice qui se projettent sur le plan horisontal en 1, 2, 3; 4, 5, 6, etc. On construit de cette manière les points de la projection verticale *o′hh′h″*, etc. de l'hélice, dont le pas est *o′h′*, ou *hh″*.

98. Ayant la projection horisontale et verticale de l'hélice tracée sur le cylindre à base circulaire o 4 8...., on demande la tangente à l'hélice parallèle à un plan donné XYZ? Par le point O, *d* de l'axe du cylindre, on conçoit une parallèle à la tangente 4L, *dl* de l'hélice. Cette parallèle, en tournant autour de l'axe du cylindre, engendre un cône droit qui a pour base sur le plan horisontal le cercle décrit du point O comme centre avec un rayon OP = L4 ou *l*4′. Le plan *d*RST mené par le sommet du cône droit parallèlement au plan donné XYZ coupe le cône droit suivant les arêtes, qui se projettent sur le plan horisontal en OS et OT; d'où il suit que les tangentes à l'hélice parallèles au plan donné, se projettent sur le plan horisontal suivant des droites VU; QR tangentes

au cercle oVQ8 aux points V, Q, qui correspondent aux points v et q du plan vertical de projection. Ainsi aux points de l'hélice V, v et Q, q, les tangentes à cette hélice sont parallèles au plan donné XYZ. Ayant supposé, pour simplifier la figure, que le plan donné était perpendiculaire au plan vertical de projection, les parallèles vv', qq' à la trace XY du plan donné, sont dans cette hypothèse tangentes à la projection verticale $o'vdh$ de l'hélice.

99. Si on proposait de mener une tangente à la projection verticale $o'dh$ de l'hélice, qui fût parallèle à une droite donnée XY, on résoudrait ce problême de la même manière que le précédent, en regardant la droite XY comme la trace d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. Pour la solution du problême précédent, on peut supposer le plan auquel la tangente à l'hélice doit être parallèle, donné d'une manière quelconque par ses traces; des deux plans de projection qu'on a choisis, il n'y en a qu'un qui soit nécessaire, c'est celui qui est perpendiculaire aux arêtes du cylindre sur lequel l'hélice est tracée.

De l'épicycloïde sphérique.

100. De deux cônes droits qui se touchent et qui ont même sommet, l'un étant fixe et l'autre mobile, un point quelconque de la base circulaire du cône mobile engendre *l'épicycloïde sphérique*. Dans ce mouvement, la distance du point générateur de l'épicycloïde au sommet commun des deux cônes ne varie pas ; d'où il suit que l'épicycloïde appartient à une sphère qui a pour rayon cette distance, et pour centre le sommet commun des deux cônes. Cette sphère coupe le cône fixe et

le cône mobile suivant deux cercles dont les plans font entre eux un angle égal à celui qui est compris entre les axes de ces cônes. Le cercle du cône mobile touche dans toutes ses dispositions le cercle du cône fixe. Pour chaque position du cercle mobile, un point de ce cercle appartient à l'épicycloïde; la droite menée de ce point de l'épicycloïde au point de contact du cercle fixe et du cercle mobile varie de grandeur; elle est d'abord nulle; elle croît jusqu'à ce qu'elle soit égale au diamètre du cercle mobile, ensuite elle décroît et redevient nulle; elle est à très-peu-près constante, pendant que le point générateur passe d'une position à une autre qui en est infiniment voisine; dans le même tems le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile, qui ne change pas sensiblement, peut être considéré comme le centre d'une sphère sur laquelle se trouve l'élément de courbe décrit par le point générateur de l'hélice. Il suit de là que le point générateur de l'hélice dans un instant quelconque de son mouvement, décrit un élément de courbe qui est à-la-fois sur deux sphères, l'une qui a pour rayon la distance constante de ce point au sommet commun des deux cônes, l'autre qui a pour rayon la distance variable de ce point à celui où le cercle mobile touche le cercle fixe; or un élément de courbe ne peut être à-la-fois sur deux sphères, qu'il ne soit sur l'intersection de deux plans qui touchent ces sphères; donc la tangente en un point quelconque d'une épicycloïde sphérique, est une droite, intersection de deux plans qui touchent deux sphères dont les centres et les rayons sont donnés.

101. L'axe du cône fixe étant supposé vertical, soit décrit sur le plan horisontal le cercle ABCD (Pl. 6, *fig.* 1) du cône fixe, qui est constamment touché par le cercle du cône mobile, sur lequel se trouve le point générateur de l'hélice. Soit

AB un arc quelconque du cercle ABCD compris entre l'origine A de l'épicycloïde et le point de contact de ce cercle ABCD et du cercle mobile dans une position quelconque. Le plan vertical *s*BE' contient, 1°. les axes S*s*, S*s*' des deux cônes; 2°. l'arête SB, suivant laquelle ces deux cônes se touchent; 3°. l'angle EBE' que font entre eux le plan horisontal du cercle fixe et le plan incliné EB*n* du cercle mobile; 4°. le diamètre BE du cercle mobile. En supposant que le plan de ce cercle mobile tourne autour de sa trace horisontale B*n* comme charnière, pour s'appliquer sur le plan du cercle fixe ABCD, et l'arc B*f'* du cercle mobile étant de même longueur que l'arc AB du cercle fixe, le point *f'* sera la position du point générateur de l'épicycloïde qui correspond au point de contact B, par lequel passe l'arête de contact SB des deux cônes. La projection horisontale F' du point *f'* est sur la droite *f'*F' perpendiculaire à la droite B*n*. Ayant mené *f'f* perpendiculaire au diamètre BE', l'arc de cercle décrit du point B comme centre avec un rayon égal à B*f*, coupe la droite BE au point F, projection du point *f'* sur le plan vertical *s*BE'. La perpendiculaire FφF' abaissée du point F sur le diamètre BE', coupe la droite *f'*F' au point F', projection horisontale du point *f'* de l'épicycloïde. Quant à la hauteur de ce point *f'* au-dessus du plan horisontal, elle est évidemment égale à Fφ.

102. Supposons maintenant que le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile, au lieu d'être en B, soit en K; on pourrait, 1°. mener le plan vertical *s*K, qui contiendrait les axes des deux cônes, 2°. l'abattre sur le plan horisontal, et trouver un point G de la projection horisontale de l'épicycloïde, comme on a trouvé le point F'; mais il n'est pas nécessaire d'employer un second plan vertical *s*K; le premier *s*BE' suffit. En effet,

soit $Bf'g'$ un arc du cercle mobile, d'une longueur égale à celle de l'arc ABK. En supposant que le cercle mobile fût dans sa véritable position, le point g' se projetterait en G′, mais le point B du secteur de cercle BG′H′ doit être en K; donc si on transporte ce secteur en KGH, le point G sera la projection horisontale d'un autre point de l'épicycloïde, distant du plan horisontal d'une quantité égale à $g\gamma$. Lorsque l'arc ABC du cercle fixe est d'une longueur égale à la demi-circonférence $Bf'E'$, le point E′ se projette sur le rayon sCe en un point e, tel que Ce égale $B\epsilon$ projection horisontale du diamètre BE du cercle mobile.

L'axe AD du cercle fixe étant égal en longueur à la circonférence entière du cercle mobile, le point D appartient à l'épicycloïde sphérique, et peut être considéré comme l'origine d'une nouvelle branche de l'épicycloïde égale à la première, et qui aurait même projection horisontale.

Il suit de cette construction, 1°. que l'épicycloïde sphérique est composée d'une infinité de branches égales, qui se projettent sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône fixe, suivant des courbes égales; 2°. que ces branches ont sur la base circulaire de ce cône, des points de rebroussement; 3°. que l'arc de cette base, compris entre deux points consécutifs de rebroussement, est égal en longueur à la circonférence du cercle mobile.

103. *Problême.* Par un point donné de l'épicycloïde sphérique, mener une tangente à cette courbe.

Solution. Soit f' le point donné sur l'épicycloïde, dont la projection horisontale est F′. La tangente en ce point (art. 100) est la droite intersection de deux plans tangens, l'un à la

sphère qui a son centre au sommet S du cône mobile et du cône fixe, l'autre à la sphère qui a pour rayon la droite f'B, et dont le centre est le point de contact B du cercle fixe et du cercle mobile sur lequel se trouve le point f' de l'épicycloïde. Le rayon de la première sphère, mené par le point f', ayant pour projection horisontale la droite sF', la trace du plan qui touche cette sphère au point f' est perpendiculaire à cette droite sF'; de plus ce plan passe par la tangente $f'l$ du cercle B$f'g'$E'; or cette tangente coupe le plan horisontal au point l de la tangente Bln du cercle fixe; donc le plan tangent à la première sphère, a pour trace sur le plan horisontal la droite lm perpendiculaire à sF'.

Le plan tangent à la seconde sphère au point f' passe par la droite $f'n$ tangente au grand cercle de cette sphère, décrit du point B comme centre avec un rayon égal à Bf'; or cette tangente coupe le plan horisontal au point n de la droite Bln, qui touche le cercle fixe au point B; donc si de ce point n, on abaisse une perpendiculaire np sur la projection horisontale BF' du rayon Bf', cette perpendiculaire sera la trace horisontale du plan tangent à la seconde sphère; elle coupe la trace lm du plan tangent à la première sphère en un point T de la tangente à l'épicycloïde. Donc la droite menée par les points T et F', touche la projection horisontale de l'épicycloïde au point F'.

104. Le plan tangent à la seconde sphère au point f' étant perpendiculaire au rayon Bf', et au plan du cercle mobile B$f'g'$E', passe par la droite EpR, menée perpendiculairement au plan BE du cercle mobile, par le point E' de ce cercle. Or cette droite Ep coupe le plan horisontal au point p; donc la droite np est la trace du plan tangent à la seconde sphère, et doit être

perpendiculaire à la projection horisontale BF′ du rayon qui passe par le point de contact f'.

Toutes les perpendiculaires au plan du cercle mobile, menées par les extrémités des diamètres tels que BE′, qui correspondent aux points de contact B des cercles fixe et mobile, coupent l'axe vertical Ss du cône droit au même point R; donc si l'on regarde ce point R comme le sommet d'un cône épicycloïdal, c'est-à-dire qui a pour base l'épicycloïde sphérique, tout plan tel que f'E′ perpendiculaire au plan du cercle mobile sur lequel se trouve le point f', sera tangent au cône épicycloïdal; car le plan f'E′ passe par le sommet R de ce cône, puisqu'il contient la droite ER; de plus il passe par la tangente à l'épicycloïde menée par le point f' de cette courbe; donc il est tangent au cône qui a son sommet au point R, et qui a pour base l'épicycloïde décrit par le point f'.

105. Quelle que soit la position du cercle mobile, on doit distinguer sur ce cercle trois points, 1°. le point générateur de l'épicycloïde; 2°. le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile; 3° l'extrémité du diamètre qui passe par ce point de contact. Ayant élevé par ce dernier point une perpendiculaire au plan du cercle mobile, cette perpendiculaire coupe l'axe du cône fixe en un quatrième point, qui est invariable comme l'inclinaison du plan du cercle mobile, par rapport au plan du cercle fixe. *Le plan mené par cette perpendiculaire et par le point générateur, est tangent au cône qui a son sommet au quatrième point, et qui a pour base l'épicycloïde sphérique décrite par le point générateur.*

---

§. VI.

APPLICATION. *Solution de quelques problêmes de géométrie.*

De la pyramide triangulaire.

106. *Problême.* Dans une pyramide triangulaire, on peut en faisant abstraction de la base, ne considérer que six angles, savoir les angles des trois arêtes, qui ont pour sommet commun, le sommet de la pyramide, et les angles des plans menés par ces arêtes. De ces six angles, trois étant donnés, on propose de trouver les trois autres.

Solution. On distingue les angles formés par les arêtes, des angles que les plans menés par ces arêtes forment entre eux, en nommant les premiers *faces* de la pyramide, et en conservant aux seconds le nom d'*angles*. Les combinaisons trois à trois des six angles de la pyramide (les trois faces et les trois angles), sont au nombre de six, savoir :

1°. Trois faces ;

2°. Deux faces et un angle formé par les plans de ces faces ;

3°. Deux faces et un angle opposé à l'une de ces faces ;

4°. Une face et deux angles adjacens à cette face ;

5°. Une face et deux angles, dont un seulement est adjacent à la face ;

6°. Trois angles.

En supposant qu'on ait donné les trois angles désignés dans l'une quelconque de ces six combinaisons, il s'agit de trouver les trois autres angles nécessaires pour completter la pyramide ; ce qui présente six questions qu'on peut résoudre chacune séparé-

ment, mais qu'on peut aussi réduire à trois par la considération de la pyramide supplémentaire.

Nous allons d'abord expliquer ce qu'on entend par *pyramide supplémentaire*. Nous ferons voir l'usage qu'on fait de cette pyramide pour réduire à trois les six questions relatives à la pyramide triangulaire; ensuite nous donnerons une solution directe pour chacune des six questions.

107. Si par un point quelconque de chacune des trois arêtes de la pyramide triangulaire, on mène un plan perpendiculaire à l'arête sur laquelle le point est situé, on obtient trois plans qui comprennent entre eux une nouvelle pyramide, qu'on a nommée pyramide *supplémentaire* de la première. En faisant varier les points pris sur les arêtes de la première pyramide, on change seulement la position du sommet de la pyramido supplémentaire; les faces et les angles de cette pyramide no varient pas, puisque les plans qui la forment sont toujours dirigés de la même manière dans l'espace.

Soient (Pl. 7, *fig.* 1) SA, SB deux des trois arêtes d'une pyramide, A et B deux points pris à volonté, l'un sur l'arête SA, et l'autre sur l'arête SB. Les plans menés par les points A et B perpendiculairement aux arêtes SA, SB, ont évidemment pour traces sur le plan des deux arêtes SA, SB, les deux droites AX, BX perpendiculaires l'une à la droite SA, et l'autre à la droite SB; or dans le quadrilatère ASBX, les angles A et B sont droits, donc l'angle X est supplément de l'angle S; mais l'angle S est une face de la première pyramide; l'angle X est un angle de la pyramide supplémentaire; donc ces deux angles S et X sont supplémens l'un de l'autre. Par la même raison, le plan d'une face quelconque de la pyramide supplémentaire est perpendiculaire aux plans de deux

faces de la pyramide primitive, et l'angle de ces deux plans est supplément de la face de la pyramide supplémentaire.

108. Il suit de cette définition que de deux pyramides, dont la première est formée par des plans perpendiculaires aux arêtes de la seconde, l'une quelconque est supplémentaire de l'autre. Il est maintenant facile de voir que les six questions (art. 106) se réduisent à trois. En effet, si on donne les trois angles A, B, C d'une pyramide, les supplémens de ces angles seront les faces de la pyramide supplémentaire; or connaissant les trois faces, on pourra, en supposant la première des six questions résolue, déterminer les trois angles; mais ces trois angles sont les supplémens des faces de la pyramide dont on donne les angles A, B, C; donc les six angles de cette dernière pyramide seront déterminés. Ainsi l'on voit que la première et la sixième question se réduisent à une seule; on démontrera de la même manière que la deuxième et la cinquième, la troisième et la quatrième, se réduisent à deux autres questions; donc la solution complette de la pyramide triangulaire ne comprend que les trois problèmes suivans:

1°. Etant données les trois faces d'une pyramide triangulaire, déterminer les trois angles;

2°. Etant donnés deux faces et un angle formé par les plans de ces faces, déterminer les deux autres angles.

3°. Etant donnés deux faces et un angle opposé à l'une de ces faces, déterminer les deux autres angles.

109. *Problême.* Etant données les trois faces d'une pyramide, déterminer les trois angles.

Solution. Les trois faces données étant développées sur un

même plan, soient (Pl. 7, *fig.* 2) SA ou SF, SB, SE les arêtes d'une pyramide dont il faut déterminer les angles. On suppose les deux arêtes SB, SE fixes dans le plan de la face BSE, et on fait tourner les droites SA et SF l'une autour de la droite SB, et l'autre autour de la droite SE; par ce mouvement, on engendre deux surfaces coniques droites qui ont même sommet; la droite intersection de ces deux cônes est la troisième arête de la pyramide. Pour déterminer cette droite, on imagine une sphère d'un rayon quelconque SA ou SF, dont le centre est au point S, sommet commun des deux cônes droits; cette sphère coupe le premier cône suivant un cercle du rayon AB, dont le centre est en B, et le second cône suivant un cercle du rayon EF dont le centre est en E. Les plans de ces cercles étant perpendiculaires, l'un à la droite SB et l'autre à la droite SE, ils se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan de la face BSE; or cette droite contient les points d'intersection des deux cercles; donc si du point B comme centre, avec le rayon AB, on décrit le cercle AC qui coupe la droite CD perpendiculaire à ABD au point C, ce point appartient à la troisième arête; d'où il suit que dans le triangle CBD rectangle en D, l'angle CBD est égal à l'angle compris entre les faces BSE et BSA. Décrivant du point E comme centre avec le rayon EF, le cercle FC′, et élevant la perpendiculaire DC′ à ED, l'angle C′ED est égal à l'angle des faces BSE et ESF.

110. Au lieu de développer la pyramide sur le plan de la face BSE, on aurait pu prendre pour plan de développement celui de la face ASB, ou celui de la face ESF; et on aurait construit par la méthode exposée dans l'article précédent, l'angle de ces deux faces ASB et FSE, mais il sera plus simple de

concevoir un plan perpendiculaire à l'arête SA ou SF (*fig.* 2), en un point A ou F. Ce plan coupera les faces ASB et ESF, l'une suivant AG, perpendiculaire à SA, et l'autre suivant FH perpendiculaire à SF. Ce plan mené par les deux droites AG, FH coupe la pyramide suivant le triangle GHK, dans lequel les côtés GK, HK sont égaux aux droites GA, HF, et dont l'angle K opposé au côté GH est égal à l'angle formé par les deux faces ASB, ESF.

Les droites AB, BI, IF sont les trois côtés d'un autre triangle CBI, dans lequel l'angle B opposé au côté CI, est égal à l'angle déja trouvé (art. 109) des deux faces ASB, BSE.

Les faces données de la pyramide, au lieu d'être des angles aigus, pourraient être des angles obtus; la *fig.* 2 deviendrait la *fig.* 2 (*bis*) dans laquelle les mêmes points sont marqués des mêmes lettres.

111. Si d'un point de l'espace, on dirige deux rayons visuels vers deux objets déterminés, ces deux rayons et la verticale passant par le même point, forment une pyramide triangulaire; l'angle compris entre les deux faces dont les plans se coupent suivant la verticale, est ce qu'on nomme l'angle *réduit à l'horison*. Connaissant les angles de la verticale avec les rayons visuels, et l'angle des deux rayons visuels entre eux, il est évident que la recherche de l'angle réduit à l'horison, dépend de la solution d'une pyramide triangulaire dont on connaît les trois faces.

112. *Problême.* Connaissant dans une pyramide triangulaire deux faces et l'angle formé par les plans de ces faces, déterminer les deux autres angles et la troisième face de la pyramide.

Solution. La question proposée se réduit à trouver la troisième face de la pyramide, car alors on connaîtra les trois faces de cette pyramide, et par la solution du problême précédent, on construira les deux angles inconnus. Pour déterminer la face inconnue, soient (Pl. 7, *fig.* 3) ASB, BSE les deux faces données, développées sur le plan de la seconde BSE. Soit CBD l'angle de ces deux faces, donné dans un plan ABCD perpendiculaire à la droite SB. Le plan SBC contenant la face donnée ASB, le point A de l'arête SA est élevé au-dessus du plan horisontal d'une hauteur égale à la droite CD perpendiculaire à la droite ABD; donc si par la droite CD, on mène un plan CDE perpendiculaire à l'arête SEI, ce plan contiendra le triangle C′ED, dans lequel l'angle E opposé au côté C′D=CD, sera l'angle du plan de la troisième face cherchée et du plan de la face BSI; prolongeant la droite DE d'une quantité EF=EC′, et menant la droite SF, l'angle ESF sera évidemment la troisième face cherchée.

Construisant la pyramide avec les trois faces ASB, BSE et ESF, les points A, C, F se réuniront en un seul; d'où il suit que les droites SA et SF sont les rayons d'un même cercle décrit du point S comme centre.

Le plan ABCD coupe la pyramide suivant un triangle CBI, dans lequel le côté CB=AB, et le côté CI=IF; donc les deux droites IF, EF et les deux arcs de cercle AF, C′F, décrits des points S et E comme centres, concourent au même point F de l'arête SF; d'où il suit que deux quelconques de ces lignes déterminent par leur intersection le côté SF de la face cherchée ISF.

Si au lieu de l'angle CBD compris entre les deux faces ASB, BST, on eût pris le supplément ABC, on aurait trouvé par la même construction la troisième face ISF′ de la pyramide.

113. *Problème.* Connaissant dans une pyramide deux faces et un angle opposé à l'une de ces faces, déterminer la troisième face.

Solution. Soient (Pl. 7, *fig.* 4) BSE et ESF les deux faces données, développées sur le plan de la première BSE; soit E*b*H′ l'angle formé par le plan qui contient la face BSE et par le plan de la face qu'il s'agit de trouver; les droites S*b*B et *b*H′ déterminent la position du plan qui contient la face cherchée. L'arête SF, en tournant autour de l'arête SE comme charnière, engendre un cône droit, dont la base circulaire *ff′* est dans un plan FEDG perpendiculaire à la charnière SE; or ce plan coupe le plan S*b*BH′ de la face cherchée, suivant la droite GH; donc lorsque l'arête SF est dans le plan de la face cherchée, le point F de cette arête est en *f* ou *f′*, intersection de la circonférence *ff′* et de la droite GH. Supposons-le en *f*: en faisant tourner le plan S*b*BH′ sur SBG comme charnière, pour l'abattre sur le plan de la face connue BSE, les distances du point *f* aux points G et S de la charnière, ne varient pas; donc le point A intersection des arcs de cercle FA, *f*A décrits des points G et S comme centres avec des rayons égaux à G*f* et SF, est ce que devient le point *f*, lorsqu'il est abattu sur le plan de la face BSE; donc ASB est la troisième face de la pyramide, correspondant au point *f*. On trouverait de la même manière l'angle A′SB pour la troisième face de la pyramide, qui correspond au point *f′*. Connaissant les trois faces de la pyramide, les trois angles seront déterminés (art. 109 et 110).

114. On a fait voir (art. 108) comment les six questions relatives à la pyramide triangulaire se réduisaient à trois par la considération de la pyramide supplémentaire; nous allons main-

tenant donner une solution des trois dernières questions, qui sera indépendante des propriétés de la pyramide supplémentaire.

Problême. Les trois angles d'une pyramide étant donnés, on demande les trois faces.

Solution. Soient **A**, **B**, **C** les trois angles donnés. Ayant mené deux plans, inclinés l'un par rapport à l'autre sous un angle égal à l'un des angles donnés, à **A**, par exemple, la question consiste à déterminer un plan qui passe par un point quelconque pris dans l'espace, et qui fasse avec les deux premiers des angles égaux à **B** et à **C**; ce troisième plan coupera la droite intersection des deux premiers plans, en un point, qui sera le sommet de la pyramide formée par les trois plans.

La condition de mener un plan qui fasse avec un autre plan donné un angle déterminé, équivaut à la condition de mener un plan tangent à un cône droit, dont l'axe est perpendiculaire au plan donné, et dont le côté fait avec ce même plan l'angle déterminé; or l'un des plans qui comprend une face de la pyramide cherchée, doit faire avec deux plans donnés de position, des angles connus; donc il doit toucher deux cônes droits qui ont même sommet. Pour construire le plan qui touche ces deux cônes (nommons-les C et C′), en n'employant que la ligne droite et le cercle, il faut observer que ce plan touche en même tems toutes les sphères inscrites aux cônes C et C′, et tous les cônes circonscrits aux sphères inscrites, prises deux à deux, dont l'une est inscrite au cône C et l'autre au cône C′.

115. Soient (Pl. 7, *fig.* 5) **A**, **B**, **C** les trois angles donnés; et *cb*E un angle égal à l'un des angles donnés, à **A** par exemple. Ayant mené par un point **D** pris à volonté dans le plan de

l'angle *cb*E, deux droites DE, D*l* perpendiculaires, l'une à *b*E et l'autre à *bc*, on regarde ces droites comme les axes de deux cônes droits, dont les côtés DG, DC font avec les plans *b*EG et *blc* de leurs bases circulaires, des angles DGE, D*cl*, l'un égal à B et l'autre égal à C, et il s'agit de mener par le point D un plan qui touche à-la-fois ces deux cônes.

Soit H le point de rencontre de l'axe DEG et de la droite GH perpendiculaire à DG. Une sphère dont le centre est en H, et qui a pour rayon GH, est inscrite au premier cône, et le touche suivant le cercle du rayon EG; une seconde sphère d'un rayon CM égal à celui de la première sphère, est inscrite au second cône, et le touche suivant le cercle du rayon CL. Pour construire le centre M de la seconde sphère, on élève une perpendiculaire DK = HG au côté CD du second cône; la parallèle KC à l'axe DL*l* de ce cône, coupe le côté CD au point C, et la parallèle CM égale et parallèle à DK, détermine la position du centre M. Ayant mené la droite CB parallèle à *cb* et BS perpendiculaire à BE, on peut prendre la droite BS pour l'intersection des deux plans qui font entre eux l'angle donné A, et considérer cette droite comme une arête de la pyramide cherchée.

Les deux sphères de rayons égaux dont l'une est inscrite au premier cône et l'autre au second cône, sont touchées par un cylindre droit dont l'axe est parallèle à la droite HM, suivant des grands cercles de ces sphères, dont les plans HO, MP sont perpendiculaires à la droite HM, qui joint les centres H et M des sphères; donc le plan tangent à ce cylindre mené par le point D touchera les deux cônes, et l'arête de contact sur chaque cône passera par le point d'intersection du cercle base de ce cône, et du cercle commun au cylindre et à la sphère qui est inscrite à ce même cône. Mais le plan de ce dernier cercle

coupe le plan de la base du cône suivant la droite OF perpendiculaire à EOG; donc le plan tangent aux deux cônes touche le premier suivant une arête qui passe par le point F; donc la tangente FS au cercle décrit du point E comme centre avec le rayon EG, forme avec la droite BS un angle BSF, qui est une face de la pyramide cherchée.

Ayant décrit du point B comme centre avec un rayon BL, l'arc LL', et du point L' comme centre avec un rayon L'C' = LC le cercle C'A, la tangente SA à ce dernier cercle et la droite SB comprennent entre elles la face ASB de la pyramide cherchée.

Connaissant deux faces ASB, BSF et l'angle des plans de ces faces, la troisième face sera déterminée (art. 112).

Si par le point O on mène la droite OP parallèle à HM, qui coupe la droite BC au point P, ce point sera la projection du point de contact A, sur le plan CBE perpendiculaire à l'arête SB. Donc après avoir décrit du point B comme centre, avec un rayon BP, l'arc P*p* qui coupe la droite BC' au point *p*, la perpendiculaire *p*A à BC' contient encore le point A de l'arête SA, tangente au cercle C'A.

116. La droite OF coupe le cercle décrit du point E comme centre avec un rayon égal à EG, en deux points F et F'. La tangente à ce cercle menée par le point F' transporterait le sommet S de la pyramide en un point S' de la droite SBS', tel que BS = BS'; la pyramide qui aurait pour arête cette droite F'S', serait *symétrique* par rapport à la pyramide qui a pour arête la droite BS.

117. Les sphères inscrites aux deux cônes ne sont pas seulement touchées par un cylindre dont l'axe est parallèle à la

droite qui joint leurs centres ; on conçoit encore le cône qui a son sommet au milieu *d* de cette droite, et qui est circonscrit aux deux sphères ; les deux plans tangens à ce cône menés par le point D, forment avec les deux plans inclinés l'un par rapport à l'autre d'un angle CBE; deux pyramides qui sont symétriques ; chacune de ces pyramides ne diffère de celle qu'on a déterminée en faisant usage du cylindre circonscrit, que par un seul angle. Le plan tangent au cylindre donne une pyramide dont les angles A, B, C sont aigus ; le plan tangent au cône dont le sommet est en *d*, détermine une pyramide dans laquelle deux de ces angles sont égaux aux angles A et B et le troisième angle est supplément de l'angle C. La *fig.* 5 (*bis*) est relative à cette dernière pyramide ; l'explication de la *fig.* 5 s'y applique, parce que les points analogues y sont marqués des mêmes lettres. Ces deux figures ne diffèrent que par les droites perpendiculaires à la ligne des centres M et H, sur lesquelles se trouvent les points P et O. Dans la *fig.* 5, ces droites sont MP, HO, et dans la *fig.* 5 (*bis*) R'PT' et ROT.

Les trois plans qui forment la pyramide dont les angles sont A, B, C, divisent l'espace en huit pyramides, dont quatre symétriques deux à deux, sont déterminées par les constructions précédentes. Deux des quatre autres, symétriques l'une par rapport à l'autre, ont pour angles A, C, et le supplément de B ; enfin les deux dernières ont pour angles B, C et le supplément de A.

En excluant les supplémens des angles donnés A, B, C, les deux pyramides symétriques construites (art. 115 et 116), sont les seules dont les faces comprennent entre elles les angles donnés.

118. *Problême.* Etant donnés dans une pyramide deux angles et la face à laquelle ces angles sont adjacens, construire les deux autres faces.

Solution. Soient (Pl. 7, *fig.* 6) BSE la face donnée, *Cbd* et *C''d'd''* les deux angles connus, adjacens l'un à l'arête SB et l'autre à l'arête SE; il s'agit de déterminer les deux autres faces.

Ayant mené la parallèle quelconque CD à SB, et la parallèle *C''d''* à SE, ces deux droites qu'on suppose dans un plan parallèle au plan de la face BSE, se coupent en un point D, qui est la projection d'un point de la troisième arête de la pyramide, sur le plan de la face BSE. Faisant mouvoir les deux plans SB*b*C et SE*d'*C'', l'un autour de SB, l'autre autour de SE, le point de l'arête dont D est la projection, viendra se placer dans le plan de la face BSE sur les droites DBA et DEF, perpendiculaires, la première à SB et la seconde à SE; de plus ce point est à une distance du sommet S de la pyramide, égale à l'hypothénuse du triangle rectangle qui a pour côtés adjacens à l'angle droit, DS et *d*C ou *d'*C''; donc dans le développement, ce point est sur le cercle décrit du point S comme centre, avec cette hypothénuse pour rayon, et par conséquent il est à la rencontre de ce cercle et des droites DA et DF; donc les angles ESF et ASB sont les deux faces cherchées.

On aurait encore pu construire les points A et F, en observant que BA = *b*C, et que EF = *d'*C''.

119. *Problême.* Etant donnés deux angles et la face opposée à l'un de ces angles, on demande les deux autres faces?

Solution. Soient (Pl. 7, *fig.* 7) BSD la face donnée, CBD l'angle du plan de cette face avec le plan SBC qui contient la

seconde face, BC′D′ l'angle de ce dernier plan avec celui qui contient la troisième face; la question consiste à mener par la droite SD un plan qui fasse avec le plan C′BS un angle égal à BC′D′. Ayant pris le point D pour le sommet d'un cône droit, dont DL perpendiculaire à BC′ est l'axe, et dont le côté DC fait avec BC un angle BCD égal à BC′D′, on abat le plan SBC sur le plan de la face BSD, et la base LC du cône, contenue dans ce plan, vient se placer suivant le cercle C′AA′ qui a pour rayon la droite C′L′ = CL, et dont le centre est un point L′ de la droite BD, tel que BL′ = BL. Si du point S, on mène à ce cercle la tangente SA ou SA′, l'angle ASB ou A′SB sera la face adjacente à BSD; car le plan qui passe par SD et SA ou par SD et SA′, est évidemment tangent au cône dont LD est l'axe; donc il fait avec le plan C′BS un angle égal à l'angle donné BC′D′.

Ayant deux faces BSD et ASB ou A′SB, et l'angle CBD compris entre elles, on achèvera la solution, comme il a été dit art. 112.

120. Les six questions relatives à la pyramide triangulaire, que nous venons de résoudre, comprennent toute la trigonométrie sphérique. Le centre de la sphère sur laquelle on a tracé un triangle sphérique, peut être considéré comme une pyramide triangulaire, qui a pour arêtes les trois rayons de la sphère menés par les sommets du triangle sphérique. Les angles que ces rayons font entre eux, et qui ont pour mesures les côtés du triangle, sont les faces de la pyramide. Ce qu'on nomme l'angle du triangle, est un angle dièdre de la pyramide.

Parmi les questions de géométrie descriptive, il y en a quelques-unes qu'on résout par des considérations très-simples, et dont néanmoins les solutions résultent de constructions graphiques longues, ou compliquées, et qu'il est difficile de comprendre à l'inspection

seule du dessin ou de l'épure. C'est par cette raison qu'il ne sera pas inutile d'ajouter une explication des Épures gravées (Pl. A, B, C, D.) relatives aux problêmes des articles 36, 94, 98 de la Géométrie descriptive.

Explication des Planches A, B, C, D.

Planche A.

121. *Problême.* Par une droite donnée, mener un plan tangent à la surface d'une sphère? (Art. 36, pag. 52, G. D.)

Fig. 1. AB et CD sont les deux projections de la droite donnée. Le centre de la sphère est un point O de la commune intersection XY des deux plans de projection.

Première solution. On regarde les points A et C, où la droite donnée perce le plan horisontal et le plan vertical, comme les sommets des deux cônes droits, qui touchent la sphère suivant deux cercles, l'un vertical, qui se projète en HH', et l'autre perpendiculaire au plan vertical de projection, qui se projète en *hh'*. Ces deux plans se coupent suivant une droite qui est située dans le plan vertical HH' : l'intersection de cette droite et du petit cercle de la sphère contenu dans ce dernier plan, détermine les points de contact de la sphère et du plan demandé. Ces points ont pour projections horisontales H, H', et pour projections verticales *h*, *h'*.

122. 2e. *Solution.* La droite donnée AB, CD rencontre en un point, le plan du cercle de contact de la sphère et de l'un des deux cônes droits circonscrits à la sphère, qui ont leurs sommets en A et C; si par ce point, on mène au cercle de contact deux tangentes, elles touchent ce cercle aux points cherchés H, *h* et H', *h'*.

123. 3e. *Solution*. Considérant les droites HH′, *hh′* comme les projections de la droite qui joint les points de contact de la sphère et du plan cherché, on mène par cette droite et par le centre O, un plan dont la trace horisontale est OK. Faisant tourner ce plan autour de la droite OK, le point L, L′ de la droite HH′, *hh′* s'abat sur le plan horisontal en un point ν, tel que Mν = MN, et MN est l'hypothénuse d'un triangle rectangle L′MN, dont le côté L′N = L′L.

La droite Kν coupe le grand cercle de la sphère, décrit du point O comme centre, en deux points P et Q, d'où l'on abaisse sur la charnière OK, les perpendiculaires PH, QH′, qui rencontrent la droite HH′ aux points H, H′, projections horisontales des points de contact de la sphère et du plan tangent cherché. Menant les perpendiculaires H*h*, H′*h′* sur la commune intersection XY des plans de projection, on aura les points *h*,*h′* projections verticales des mêmes points de contact.

124. 4e. *Solution*. *Fig.* 2. Par le centre O de la sphère, on mène un plan perpendiculaire à la droite donnée AB, CD; ses traces sur les plans de projections, sont les droites OL, OM, perpendiculaires l'une à AB et l'autre à CD. Ce plan rencontre la droite donnée en un point N, N′, et coupe la sphère suivant un grand cercle. Les tangentes au grand cercle, menées par le point N, N′, touchent la sphère aux points de contact de cette sphère et du plan cherché. Le plan OL, OM ayant tourné sur sa trace horisontale OL comme charnière, le point N, N′ de ce plan s'abat sur le plan horisontal en *n*, par lequel on mène les tangentes *n*P, *n*Q au grand cercle OPQ. La tangente *n*Q; qui coupe le plan horisontal au point R, a pour projection horisontale la droite NRH′; d'ailleurs, le point Q se projète sur le plan horisontal en un point de la droite QH′, perpendicu-

laire à ORL; donc le point de contact Q se projète sur le plan horisontal en H'; mais la droite PQ coupe le plan horisontal au point K de la trace OL; donc la droite PQ se projète sur le plan horisontal en H'KH. Abaissant du point P la perpendiculaire PH sur OL, le point H, intersection de cette perpendiculaire et de la droite H'KH, est la projection horisontale du second point de contact P.

Pour construire les projections verticales des points de contact P et Q, on remarque que la tangente nQ a pour projection verticale la droite N'rh'. L'intersection de cette droite et de la perpendiculaire H'h' à la commune intersection XY des plans de projection, détermine le point h' projection verticale du point Q. D'ailleurs le point K de la droite PKQ se projète verticalement en K'; donc cette droite PQ se projète sur le plan vertical en h'K'h : le point h, intersection de cette projection et de la perpendiculaire Hh à la commune intersection XY, est la projection verticale du point de contact P.

On peut encore remarquer que la droite PQ étant perpendiculaire au plan mené par le centre O de la sphère, et par la droite donnée AB, CD, les projections HH', hh' de la droite PQ, sont perpendiculaires aux traces OA, OC du plan mené par le cercle O de la sphère, et par la droite donnée AB, CD.

Planche B.

125. Intersection de trois cylindres droits à base circulaire.

Cette Planche contient la solution de ce problême (art. 94, pag. 119, G. D.) : Connaissant les distances d'un point à trois droites, construire ce point ?

Le point cherché appartient évidemment à trois surfaces cylindriques, qui ont pour génératrices des droites parallèles

aux droites données, et pour sections perpendiculaires aux génératrices, des cercles dont les rayons sont égaux aux distances données du point aux trois droites. Ces cylindres ont pour traces sur le plan horisontal les trois ellipses A, B, C, qu'on peut regarder comme les bases de ces cylindres. En les désignant par les mêmes lettres, les cylindres A et B se coupent suivant une ligne dont la projection horisontale ou verticale est composée de deux branches 1234E et 5678D. Les deux projections sont marquées des mêmes lettres.

Les cylindres A et C se coupent, suivant une ligne à deux branches, qui se projètent, en 1256GG′ et 3478FF′; enfin, les cylindres B et C se coupent suivant une ligne à une seule branche: cette ligne se projète suivant la courbe 12K4H3T87RO6N5M1, qui a un point double sur le plan horisontal, et deux points doubles sur le plan vertical.

Lorsque les trois courbes qui résultent de l'intersection de trois cylindres du second degré se rencontrent, le nombre des points de rencontre ne peut pas être plus grand que huit : ces points sont marqués sur la Pl. B des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. En changeant les données du problême, le nombre de ces points pourra diminuer, mais il sera toujours pair.

On construit l'intersection de deux quelconques des trois surfaces cylindriques, par la méthode exposée art. 82, G. D, et art. 86 du supplément.

Planches C *et* D.

126. Ces planches sont relatives au problême résolu art. 98 et 99 de la *Géométrie descriptive.* On suppose que la base d'une pyramide triangulaire, et les angles des faces opposés aux côtés de cette base, sont connus, et on propose de construire

le sommet de la pyramide. Ce sommet est (articles cités) le point commun à trois surfaces de révolution. Ces surfaces ont pour axes les côtés de la base de la pyramide, et pour génératrices des arcs de cercles qui ont pour cordes ces mêmes côtés, et qui mesurent des angles doubles des angles donnés de la pyramide.

Les axes des surfaces de révolution étant les côtés d'un triangle, chaque sommet de ce triangle peut être considéré comme le centre d'une suite de sphères qui coupent deux quelconques des trois surfaces de révolution suivant des cercles (art. 83, G. D.), et les points communs à ces cercles appartiennent à la courbe d'intersection de ces surfaces. Le tracé graphique qui résulte de cette considération, exige une main habile et très-exercée. Les dessins des planches C et D ont été exécutés avec le plus grand soin par M. Girard, dessinateur de l'École Polytechnique.

Soit, (*fig.* 1, Pl. C.) XYZ, le triangle qui sert de base à la pyramide. Sur XZ comme corde, on décrit un cercle XFZ*f*X, tel que l'arc Z*f*X mesure un angle double de l'angle de la face, opposé au côté XZ. Ce cercle, en tournant autour de sa corde XZ, engendre une surface de révolution dont la projection sur le plan du triangle XYZ, a pour limite la figure AFDCEBA, terminée par deux demi-cercles AFD, BEC et deux parallèles AB, CD. De même la surface de révolution qui a pour axe le côté XY de la base de la pyramide, a pour limite de sa projection sur le plan de cette base, la figure KGLMHNK, dont le contour est formé de deux demi-cercles KGL, NHM et de deux parallèles KN, LM. Ces surfaces de révolution se coupent suivant une ligne dont la projection (*fig.* 1), sur le plan horisontal du triangle XYZ, est une courbe qu'on distingue par un trait ponctué, continu, et qui passe par les points X, 1, 2, E′, δ, *g*, 3, 4, X, α, 3, 5, α', 6, F′, *e*, X.

Les cinq points X, E′, *g*, F′, *e* sont déterminés par les

intersections des cercles générateurs des deux surfaces de révolution.

α, α' sont les deux points de contact de la courbe et des droites parallèles AB, CD.

Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont les projections horisontales des points d'intersection des trois surfaces de révolution.

127. Chaque surface de révolution peut être regardée comme composée de deux nappes, qui sont l'une et l'autre de révolution, et qui ont pour génératrices les deux segmens d'un cercle, séparés par une corde de ce cercle.

Pour distinguer la nappe engendrée par le plus petit segment, de la nappe engendrée par le plus grand, on peut appeler la première, *nappe intérieure*, et l'autre *nappe extérieure*. L'intersection de deux surfaces résulte de l'intersection des différentes nappes qui se combinent entre elles. Les nappes extérieures, d'une part, et les nappes intérieures, de l'autre, se coupent suivant une branche de courbe fermée, dont les projections peuvent être engendrées d'un mouvement continu par un point mobile. Il en est de même de la branche de courbe qui résulte de la combinaison de la nappe extérieure ou intérieure de l'une des surfaces, avec la nappe intérieure ou extérieure de l'autre surface. Ces deux combinaisons donnent une seule courbe qu'un point mobile peut suivre sans discontinuité; d'où il suit que la ligne d'intersection des deux surfaces est composée de deux branches fermées, dont les projections sur un plan (*fig.* 2) perpendiculaire à l'un des axes, à XY par exemple, sont séparées : les projections de ces deux branches sur le plan de la base de la pyramide, se réunissent en une seule courbe.

Les branches fermées, projections de la ligne d'intersection de deux surfaces sur le plan perpendiculaire à l'un des axes (XY),

ont en général des points doubles ; cependant il y a certaines données du problême pour lesquelles l'une de ces branches n'a pas de point double. Ainsi, la branche à nœud $14b\nu^4\nu^1xax1$ (*fig.* 2, Pl. C) devient, pour de nouvelles données (*fig.* 2, Pl. D), la courbe sans nœud $1a\nu'b1$. Le grand segment O'ZY, (*fig.* 1, Pl. D), et les petits segmens qui ont une corde commune XY, se coupent aux points a', b', dont les projections sur le plan (*fig.* 2, Pl. D) de la courbe sans nœud $1a\nu'b1$, sont a et b.

128. Les deux nappes intérieures (*fig.* 1, Pl. C), qui ont pour axes les côtés XZ, XY, se coupent suivant une ligne dont la projection horisontale est la portion de courbe X43δE'; or la partie E'δg de cette courbe, qui se termine aux points E',g, est en dehors des limites de la projection horisontale des nappes intérieures; donc cette portion de courbe ne correspond point à une partie réelle de la ligne d'intersection des deux surfaces. Il en est de même de la portion de courbe F'βe, qui est en dehors de la limite de la projection horisontale d'une nappe extérieure de la surface de révolution qui a pour axe le côté XY ; et en effet, projetant la ligne d'intersection des deux surfaces de révolution, qui ont pour axes les droites XY, XZ, sur un plan UV perpendiculaire à l'un de ces axes (XY), on obtient (*fig.* 2) la courbe $x123456x$, dont le trait ponctué est le même que dans la projection horisontale. Cette courbe est composée de deux branches séparées, dont chacune a un nœud. La première branche est $12\iota\nu\nu'xe'x1$; la seconde branche est $43\gamma\nu^3\nu^4x56\nu^6\nu^5x4$, et il n'y a aucune partie de ces deux branches, qui corresponde aux portions E'δg, F'βe (*fig.* 1) de la projection horisontale.

On reconnaîtra de la même manière que les deux surfaces de révolution qui ont pour axes les côtés XY, YZ, se coupent

suivant une ligne qui comprend deux parties, dont les projections horisontales sont $\mathrm{H}\lambda p$, $o\mu g'$ (*fig.* 1), et qui n'ont pas de projections verticales.

Tout ce qui est relatif à l'intersection de ces deux surfaces est indiqué par un trait long, suivi d'un seul point rond, et tout ce qui est relatif à l'intersection des deux surfaces de révolution qui ont pour axes les droites **YZ**, **ZX**, est indiqué par un trait long, suivi de trois points ronds. Cette dernière intersection comprend aussi deux parties, dont les projections horisontales sont $\mathrm{E}\varphi f$, $\mathrm{P}\psi \mathrm{P}'$ (*fig.* 1, Pl. C), et qui n'ont point de projections verticales (*fig.* 2).

129. Les trois lignes qui résultent de l'intersection des trois surfaces de révolution, considérées deux à deux, se rencontrent aux points marqués des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, dans les projections horisontale et verticale; chacun de ces points en projection horisontale correspond à deux points en projection verticale, qui sont à égales distances du plan **UV** (*fig.* 2), de la base de la pyramide. Les six points situés au-dessus du plan **UV** déterminent six pyramides qui satisfont aux conditions du problême, et les six points situés au-dessous déterminent les six autres pyramides symétriques par rapport aux premières.

D'après les données (Pl. D), on ne trouve que cinq points au-dessus du plan **UV**, et cinq points au-dessous de ce plan, pour les sommets des pyramides, qui satisfont aux conditions du problême. On a marqué sur cette planche des mêmes lettres les points analogues; la courbe d'intersection des deux surfaces qui ont pour axes les côtés **XZ**, **XY** du triangle de la base, est indiquée, comme sur la Pl. C, par un trait ponctué à points ronds, et le trait ponctué à points ronds séparés par des traits, indique la ligne d'intersection des deux surfaces qui ont

pour axes les côtés XY, YZ. On n'a pas construit sur cette épure la courbe d'intersection des deux surfaces qui ont pour axes les côtés XZ, YZ.

Les lignes pleines qui terminent la projection verticale sont les bases de deux cylindres, dont les arêtes perpendiculaires au plan vertical UV (*fig.* 2, Pl. D), sont tangentes aux deux surfaces de révolutions, qui ont pour axes les droites XY et YZ (*fig.* 1). Le plan vertical étant perpendiculaire à la droite XY, le plus grand cercle de la surface de révolution, qui a pour axe cette droite XY, sert de base au cylindre circonscrit à cette surface.

130. Lorsque des points sont déterminés par les intersections de trois surfaces, la considération de ces trois surfaces n'est pas nécessaire. En examinant la question sous un autre point de vue, les mêmes points peuvent appartenir à trois autres surfaces différentes des premières : le problème dont nous venons de donner la solution graphique, en offre un exemple. On connaît dans une pyramide triangulaire la base et les angles des faces de cette pyramide, qui sont opposés aux côtés de la base; il est facile (art. 109, Supplément) d'en déduire les angles dièdres. Soient a, b, c, les trois côtés de la base : on connaît l'angle dièdre qui comprend deux de ces trois côtés, par exemple a et b; donc si l'on a deux plans, faisant l'un par rapport à l'autre, un angle invariable, égal à l'angle dièdre connu, et si l'on fait mouvoir ces deux plans, en les assujétissant à passer constamment par les côtés a et b, la droite intersection des deux plans mobiles engendrera un cône qui aura pour sommet le point d'intersection des deux côtés a et b; or, il est évident que la surface de ce cône contient le sommet de la pyramide; donc ce sommet sera le point commun à trois surfaces coniques, qui auront pour sommets les points de rencontre des

trois côtés *a*, *b*, *c* de la base de la pyramide. La solution graphique qui résulte de cette considération étant moins simple que celle donnée par M. Monge, nous ne conseillerons pas de s'y arrêter; mais nous recommanderons la solution suivante :

131. Ayant construit sur les trois côtés du triangle qui sert de base à la pyramide, les cercles générateurs des trois surfaces de révolution, qui, par leur intersection, déterminent le sommet de la pyramide; qu'on se représente la ligne d'intersection de deux quelconques de ces trois surfaces, de celles, par exemple, qui ont pour axes de révolution les deux côtés *a* et *b* de la base, *c* étant le troisième côté. Cette ligne, en tournant autour du troisième côté, engendre une quatrième surface de révolution, sur laquelle se trouvent les points communs aux trois premières surfaces. Mais deux surfaces de révolution qui ont même axe, et qui se pénètrent, ne peuvent se couper que suivant un cercle; donc la troisième et la quatrième surfaces de révolution se coupent suivant un cercle qui contient le sommet de la pyramide. Pour trouver un point de ce cercle, il suffit de couper ces deux surfaces par un plan méridien quelconque, et ce plan peut être celui de la base de la pyramide, ou des trois côtés *a*, *b*, *c* de cette base; les points communs aux courbes génératrices contenues dans ce plan, déterminent les cercles communs aux deux surfaces. La courbe génératrice de la troisième surface est le cercle, qui passe par les extrémités du côté *c*, et dont un segment mesure un angle double de l'angle donné opposé à ce côté *c*. Quant à la courbe génératrice de la quatrième surface, qui est située dans un plan méridien passant par l'axe *c*, on la construit, en remarquant que chaque point de la courbe d'intersection des deux premières surfaces, est le sommet d'une pyramide qui a pour base le triangle formé

par les trois côtés a, b, c, et pour arêtes les trois cordes des cercles générateurs des deux premières surfaces.

Soient les trois cordes x, y, z; la corde y appartient aux deux cercles générateurs des deux premières surfaces de révolution, et les sphères décrites des extrémités du côté c, comme centres, avec des rayons égaux aux cordes x et z, se coupent suivant un cercle de la quatrième surface de révolution. Les points de ce cercle, situés dans le plan des trois côtés a, b, c, appartiennent à la courbe génératrice de cette quatrième surface. Faisant varier la corde x, on a trois nouvelles arêtes x', y', z', et un nouveau cercle résultant de l'intersection des deux sphères qui ont pour centres les extrémités du côté c, et pour rayons les cordes x', z'. Ce cercle contient encore deux points de la courbe génératrice de la quatrième surface de révolution. Cette courbe étant construite, elle coupera le cercle générateur de la troisième surface de révolution; et les points d'intersection de ces deux courbes, seront les sommets des pyramides cherchées, sur les faces de ces pyramides qui passent par le côté c.

132. On a d'abord considéré la quatrième surface de révolution, qui a pour axe le côté c, comme engendrée par la ligne d'intersection des deux premières surfaces de révolution, qui ont pour axes les côtés a et b; mais on a vu qu'il n'était pas nécessaire de construire cette ligne pour obtenir une seconde génératrice de la quatrième surface : en la supposant coupée par un de ses plans méridiens, passant par l'axe c, on trouve tous les points de l'intersection, en ne faisant usage que du compas, et en décrivant des arcs de cercles de rayons déterminés, qui ont pour centres les extrémités du côté c de la base de la pyramide.

133. On démontre par l'analyse que la courbe méridienne, génératrice de la quatrième surface de révolution, dont l'équation (1) est du 8e. degré, et le cercle générateur de la troisième surface de révolution qui a pour axe le côté *c*, ne peuvent se couper qu'en huits points. Or, le cercle générateur a deux positions différentes par rapport au côté *c*, et dans chaque position, il coupe la courbe méridienne du 8e. degré en huit points placés deux à deux sur la même perpendiculaire au côté *c*, et à des distances égales de ce côté; d'où il suit que les courbes méridiennes des troisième et quatrième surfaces de révolution, ne peuvent se couper qu'en seize points, sommets de seize pyramides qui ont même base, dont les arêtes font entre elles des angles égaux à des angles donnés, ou qui en sont les supplémens; enfin, ces pyramides sont symétriques deux à deux.

Ayant pris au hasard les données du problême, on a trouvé **Pl. C**, douze sommets de pyramides, et **Pl. D**, dix sommets; mais en choisissant les données telles qu'on ait, par exemple, le triangle XYZ (*fig. a*, Pl. C) pour la base de la pyramide, et les cercles ZFX, XGY, YOZ, pour les génératrices des trois surfaces de révolution, on aura les seize solutions, et les lignes d'intersection des trois surfaces de révolution se couperont en seize points.

(1) Cette équation du 8e. degré ne change pas, quels que soient les signes des cosinus des angles donnés opposés aux deux côtés de la base, parce qu'elle ne contient que les quarrés de ces cosinus. En la combinant avec l'équation du cercle, qui passe par les extrémités du troisième côté, elle se réduit au 4e. degré; d'où l'on conclut que la courbe dont l'équation est du 8e. degré, ne peut, dans ce cas, être coupée par le cercle qu'en huit points, et que le problême de l'article 126 ne peut avoir que seize solutions; proposition qu'on démontrerait difficilement par les moyens ordinaires de l'algèbre.

FIN.



TABLE DES MATIÈRES

DU SUPPLÉMENT.

Table des matières du supplément.

§. IV.

De l'intersection des surfaces.

§. V.

Des courbes à double courbure, décrites par un point qui se meut d'après une loi donnée.

§. VI.

Applications. *Solutions de quelques problèmes de Géométrie.*

ERRATA.

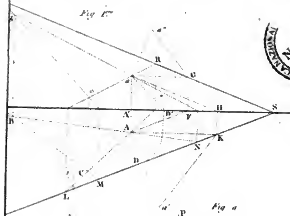
Page 15, lignes 6 et 7, au lieu de P*d*, lisez Q*d*.

Page 21, ligne 12, au lieu *des plans*, lisez : *deux plans.*

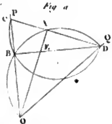
Page 31, 3e. ligne en montant, au lieu de *le centre*, lisez : *les centres.*

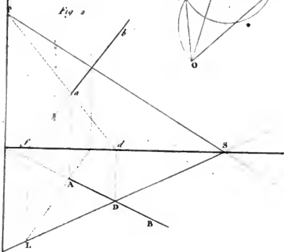
Page 44, avant-dernière ligne, au lieu de *bc*, lisez : BC.

…relatives à la ligne droite & au Plan.









L. … sculp.



L. ... sculp.



Fig. a

I. Strogny sculp.

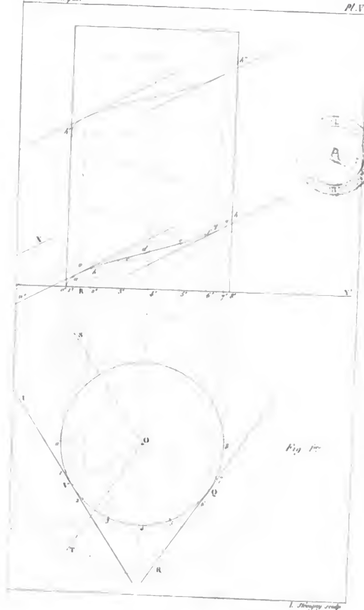
Fig. 2



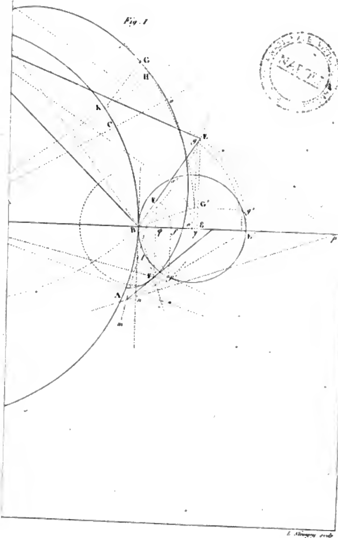
Fig. 4

Fig. 6

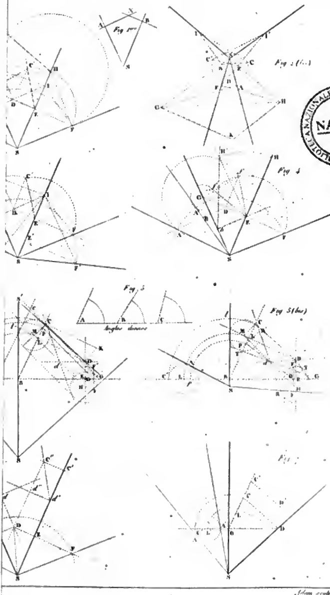
Adam sculp.


Pl. V
O
Q
R
T
S
Fig. 1re

Epicycloïde Sphérique.



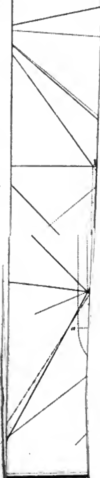
L. Sbinagry sculp.



Adam sculp.

Géométri

lan tangent à la S



tion des Intersectio urfaces.

Pl. B.

urs de Géométrie Descriptive,
par Mr Hachette

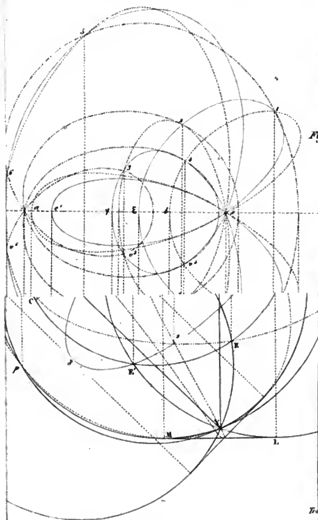
ction de trois Cylindres.



Adam sculp.

Géométrie Descriptive, M.r Hachette.
Intersections de Surfaces.

Pl. c.





L. Sturgeon sculp.

...es Intersections de Surfaces.

Pl. II.

Pyramide Triangulaire.

Fig. 2.

